نام و نام خانوادگی:

تعداد سوال: ۱۱۰

نام آزمون: ریاضی نظام قدیم ۲۳ اسفند

زمان برگزاری: ۱۵۰ دقیقه

افشار

مرکز مشاوره تحصیلی دکتر
علیرضا افشار

۱ به ازای جمیع مقادیر صحیح و مثبت k باقی مانده تقسیم عدد $۲^{۳۳k+۲}$ بر عدد ۷ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۷

۲ تصویر خط به معادله $۳x+۴y=۵$ تحت انتقال $T(x,y)=(x-۲,\ y+a)$ از نقطه $(۵,۲)$ گذشته است. a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳ خطی که دو نقطه به طول‌های ۱ و -۱ ، از منحنی به معادلهٔ $y=x^۳+ax^۲+۲x$ را به هم وصل کند، بر این منحنی مماس است، a کدام است؟

۱) $-۱,۱$ ۲) $-۱,۲$ ۳) $۱,۲$ ۴) $-۲,۱$

۴ عدد چهار رقمی $\overline{y۴۵x}$ بر ۳۶ بخش‌پذیر است. حداکثر مقدار $۲x+۳y$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۲۳ ۳) ۲۵ ۴) ۲۷

۵ قرینه‌ی خط $y=۳x+۵$ نسبت به نقطه‌ی $(۱,۲)$ کدام است؟

۱) $x=۳y-۱۵$ ۲) $y=۳x-۱۵$ ۳) $y=۳x-۷$ ۴) $x=۳y-۷$

۶ فرض کنید A ماتریس مربعی از مرتبه‌ی ۳ باشد، اگر $A^۲=A+I$ و $|A|=-۱$، دترمینان ماتریس $A+۲I$ برابر کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) -۲ ۴) $۵\sqrt{۵}$

۷ تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله $x+y+z=۸$ با شرط $x<y$ چندتاست؟

۱) ۴۰ ۲) ۲۰ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

۸ به ازای کدام مقدار m خط d به معادله‌ی $y=(m-۳)x+۲$ بر تصویر خود توسط تبدیل $T(x,y)=(x+y,x-y)$ عمود است؟

۱) $۴\pm\sqrt{۲}$ ۲) ±۲ ۳) $۲\pm\sqrt{۲}$ ۴) ±۴

۹ $x_۱=۱$ و $x_۲=۲$ به ترتیب چه نقاطی برای f هستند؟

$$f(x)=\sqrt[۳]{(x-۱)(x-۲)^۲}$$

۱) عطف قائم، بازگشت max ۲) عطف قائم، بازگشت min ۳) بازگشت min ، عطف قائم ۴) بازگشت max ، عطف قائم

۱۰ در بسط عبارت $(x+y+z+t)^{۱۰}$ با شرط $x=۱$ و $y=-۲$ چند جمله وجود دارد؟

۱) ۶۶ ۲) ۲۸۶ ۳) ۱۱ ۴) ۲۲

۱۱ ضابطه‌ی تبدیل بازتاب نسبت به خط $x=a$ کدام است؟

۱) $T(x,y)=(۲a-x,y)$ ۲) $T(x,y)=(x-a,y)$ ۳) $T(x,y)=(۲x-a,y)$ ۴) $T(x,y)=(x-۲a,y)$

۱۲ اگر برای تابع $f(x)=a|x-۱|+b|x+۱|$ داشته باشیم $A=\lim\limits_{h\to۰}\dfrac{f(h^۲+۱)-f(h^۲-۱)+۲}{h^۲}=۴$ ، آنگاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

۱۳) عدد $A=(۱۴۳)_۸$ در مبنای ۲ چگونه است؟

۱) $(۱۱۰۰۱۰۱)_۲$ ۲) $(۱۱۰۰۰۱۱)_۲$ ۳) $(۱۰۱۱۱۰۰)_۲$ ۴) $(۱۱۰۱۰۱۱)_۲$

۱۴) در بازتاب نسبت به خط $D: mx-۲=(-m+۳)y$، خط $\Delta: x+۲y=۱$ بر خودش منطبق گردیده است. نسبت تجانس در $D(x,y)=(\frac{x}{m},\frac{y}{m})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۵) اگر $f(x)=\log(۲\sin x-\sqrt{۴\sin^۲x-۲})$ و $g(x)=\log(۲\sin x+\sqrt{۴\sin^۲x-۲})$ باشد، حاصل $\frac{f'(\frac{\pi}{۳})}{g'(\frac{\pi}{۳})}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) -۲

۱۶) باقیماندهٔ تقسیم عدد $۸^{۶۷}$ بر عدد ۱۱ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷) تصویر خط Δ به معادله‌ی $۲x+y=۷$ را تحت تبدیل $F(x,y)=(x+y,۲x-۳)$ خط Δ' می‌نامیم. معادله‌ی تصویر خط Δ' با دوران π حول مبداء مختصات کدام است؟

۱) $y+۲x+۱۱=۰$ ۲) $y+۲x-۱۱=۰$ ۳) $۳y-۲x+۱۱=۰$ ۴) $۲y+x-۹=۰$

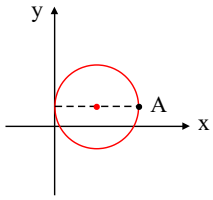
۱۸) اگر $y=|x^۲-۴|$ باشد، حاصل $D_x^۲(y)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲|x^۲-۴|}{x^۲-۴}$ ۲) $(|x|\neq ۲),\pm ۲$ ۳) $(|x|\neq ۲,\frac{۲|x|}{|x|}$ ۴) $(|x|\neq ۰,۲),۲|x|$

۱۹) معادله سیاله $۵x+۱۰y=a^۲+۱$ ، به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی a ، دارای جواب است؟

۱) ۱۲ ۲) ۳۶ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸

۲۰) نقطه‌ی $A(۴,۱)$ بر روی دایره‌ای به مرکز $(۲,۱)$ را به اندازه‌ی ۱۵۰ درجه در جهت خلاف چرخش عقربه ساعت دوران می‌دهیم. مختصات جدید آن کدام است؟



۱) $(۱,\sqrt{۳})$ ۲) $(\sqrt{۳}-۱,۲)$
۳) $(۱,۱+\sqrt{۳})$ ۴) $(۲-\sqrt{۳},۲)$

۲۱) تعداد جملات یک دنباله هندسی عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۲) عدد طبیعی n دارای ۱۲ مقسوم‌علیه مثبت است. اگر اعداد $۲n$ و $۳n$ به ترتیب دارای ۱۵ و ۱۶ مقسوم‌علیه باشند، آن‌گاه عدد $۳۰n$، چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۰ ۳) ۴۸ ۴) ۶۰

۲۳) با استفاده از کدام تبدیل هندسی، داخل مثلث مفروض می‌توان مربعی محاط کرد. که یک ضلع آن بر روی ضلع مثلث و دو رأس دیگر بر روی دو ضلع این مثلث قرار گیرند؟

۱) دوران ۲) بازتاب ۳) انتقال ۴) تجانس

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

۲۴ اگر مجموع هشت جمله از دنباله‌ی حسابی $a_1 = 1 + 2p$ و $a_2 = p - 1$ برابر ۶۰ باشد ($S_8 = 60$) قدر نسبت دنباله چقدر است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) -9 ۴) -7

۲۵ اگر $[a,b] = (a,b) + 8$ باشد، $a + b$ کدام عدد زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۲۶ تحت یک بازتاب نسبت به خط $D : 3y + ax + b = 0$، خط $D_1 : 3y - 2x - 3 = 0$ به روی خط $D_2 : 3y - 2x + 13 = 0$ تصویر می‌شود. تبدیل یافته‌ی خط D تحت نگاشت $T(x,y) = (x - 1, y)$ محور yها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

۱) $\frac{7}{3}$ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) $-\frac{7}{3}$

۲۷ اگر $f(x) = \sin^{-1}(2x - 1) - 2\sin^{-1}\sqrt{x}$ باشد، حاصل $f'(x) - f(x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{2}$ ۲) ۰ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۲۸ چند عدد ۴ رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن، کمتر از ۱۰ بوده و رقم یکان آن بزرگ‌تر از ۳ باشد؟

۱) ۱۲۶ ۲) ۷۰ ۳) ۸۴ ۴) ۳۵

۲۹ دو خط $\Delta : y = 3x$ و $\Delta' : x = -3y + 10$ مفروضند. بازتاب نقطهٔ $A(1,2)$ نسبت به Δ را B و بازتاب B نسبت به Δ' را C می‌نامیم. مختصات نقطهٔ C کدام است؟

۱) $(1,4)$ ۲) $(4,1)$ ۳) $(2,3)$ ۴) $(3,2)$

۳۰ خط مماس بر نمودار $y^3 + 3xy^2 - 3x^3y = 1$ در نقطه‌ی $(1,1)$ از کدام نواحی صفحه‌ی مختصات می‌گذرد؟

۱) اول و سوم ۲) اول و چهارم ۳) اول و دوم و سوم ۴) اول و دوم و چهارم

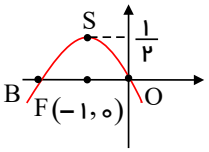
۳۱ حاصل کسر $\frac{2\log 2 + \log 5}{\log 2 + \frac{1}{2}\log 5}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{5}$ ۲) ۲۰ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{2}$

۳۲ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آن نقاط دایره $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 4 = 0$ با زاویه 120° رؤیت می شود، کدام است؟

۱) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 16$ ۲) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 12$ ۳) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 16$ ۴) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 12$

۳۳ با توجه به سهمی شکل مقابل مختصات نقطه‌ی B کدام است؟



۱) $(-\frac{1}{2}, 0)$ ۲) $(-\frac{3}{4}, 0)$ ۳) $(-2, 0)$ ۴) $(-3, 0)$

۳۴ اگر دو خط $2y = x - 1, 2y = -x + 1$ مجانب‌های یک هذلولی با کانون $(1, \sqrt{5})$ باشد طول وتر کانونی هذلولی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۳۵ مکان هندسی نقطه‌ی $(1 + 6\cos\theta, 1 + 4\sin\theta)$ وقتی θ تغییر می‌کند کدام است؟

۱) بیضی با خروج از مرکز $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) دایره به شعاع ۱۶ ۳) بیضی با خروج از مرکز $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ۴) دایره به شعاع ۳۶

۳۶ کدام گزینه در مورد اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = x\tan^{-1}x + \sin 2x$ در بازه‌ی $[0,5]$ صحیح است؟

۱) یک ماکزیمم مطلق- یک مینیمم مطلق دارد.
۲) تنها یک ماکزیمم مطلق دارد.
۳) تنها یک مینیمم مطلق دارد.
۴) نه ماکزیمم مطلق دارد و نه مینیمم مطلق

۳۷ اگر $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$ و $g(x) = x - x^2$، برد تابع $gof(x)$ کدام است؟

۱) $[0,1]$ ۲) $[0, \frac{1}{2}]$ ۳) $[-2, \frac{1}{4}]$ ۴) $[-2, \frac{1}{2}]$

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

۳۸) به ازای کدام مقدارهای a ماکسیمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x^۲-۳x+a}{x-۱}$ قبل از مجانب قائم قرار می‌گیرد؟

۱) $a>۲$ ۲) $a<۲$ ۳) $a\geq ۲$ ۴) هیچ مقدار a

۳۹) اگر A ماتریس مربعی مرتبه ۳ بوده و $(A-A^t)(A+A^t)=A^۲-(A^t)^۲$ باشد، دترمینان ماتریس $A^۲-۲AA^t+(A^t)^۲$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $|A|$ ۳) $|A|^۲$ ۴) ۰

۴۰) اگر $k=\begin{vmatrix}-x & -۱ & x\\ y & -y & -y\\ ۰ & x & y\end{vmatrix}$ باشد حاصل $\begin{vmatrix}y-x & ۱ & ۰\\ -y-۱ & -۱ & ۲x\\ x-y & -۱ & ۲y\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $۲ky$ ۲) $-۲ky$ ۳) $\frac{۲k}{y}$ ۴) $-\frac{۲k}{y}$

۴۱) نمودارهای دو تابع $f(x)=-x^۴+۲x^۲+x$ و $g(x)=x+۱$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

۱) یک نقطه – قاطع ۲) یک نقطه – غیر قاطع ۳) دو نقطه – قاطع ۴) دو نقطه – غیر قاطع

۴۲) از تساوی $\log ۳=\log(۲x-۱)+\frac{۱}{۲}\log x^۲$، مقدار لگاریتم $\frac{x}{۳}$ در مبنای ۴ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۴۳) در یک دنباله‌ی عددی مجموع پنج جمله‌ی اول، دو برابر جمله‌ی نهم است. اگر جملات اول، سوم و kام این دنباله، سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله هندسی باشند. k کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۱۳ ۴) ۲۵

۴۴) حاصل عبارت $A=۲-\frac{۴}{۳}+\frac{۱۰}{۹}-\frac{۲۸}{۲۷}+\cdots$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) A مقدار مشخصی ندارد.

۴۵) مقدار ماکسیمم موضعی تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۳+۶x^۲}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt[۳]{۴}$ ۲) $۴\sqrt[۳]{۲}$ ۳) $۲\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $\sqrt[۳]{۴}$

۴۶) به ازای کدام مجموعه مقادیر m معادله $۲x^۲-y^۲+۴x+my+m=۱$ نمایش یک هذلولی افقی است؟

۱) $m>۱$ ۲) $m<۲$ ۳) $-۲<m<۶$ ۴) $-۶<m<۲$

۴۷) اگر خط $y=k$ نمودار تابع $f(x)=x^۴-۲x^۲+۲$ را در چهار نقطه قطع کند، حدود k کدام است؟

۱) $-۱<k<۰$ ۲) $۰<k<۱$ ۳) $۱<k<۲$ ۴) $۲<k<۳$

۴۸) فاصله‌ی کانونی هذلولی $x^۲+۶xy+y^۲=۸$ کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۴۹) اگر دو مجانب مایل یک هذلولی، خطوط $۲x+y=۰$ و $۲x+ay=۰$ باشد و نقطه‌ی $(\sqrt{۵},۲)$ روی هذلولی باشد، فاصله‌ی کانونی این هذلولی چقدر است؟

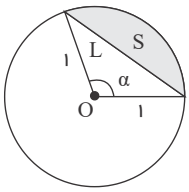
۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۵}$

۵۰) برای تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}۲x-\tan ۲x & ;\ x>۰\\ ax^n & ;\ x\leq ۰\end{cases}$ اگر مقدار $f^{(۳)}(۰)$ موجود باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۸}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

۵۱ در شکل زیر آهنگ تغییرات مساحت ناحیه هاشورخورده نسبت به L کدام است؟



۱) $\frac{L^۳}{\sqrt{۴-(۲-L^۲)^۲}}$
۲) $\frac{۲L}{\sqrt{۴-L^۲}}$
۳) $\frac{L^۲}{۲\sqrt{۴-L^۲}}$
۴) $\frac{L^۳}{\sqrt{۴-L^۲}}$

۵۲ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x+e^{۲x}$ مفروض است. معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $f^{-۱}$ ، در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن، کدام است؟

۱) $۳y-x=-۱$
۲) $y-۳x=-۳$
۳) $۲y-x=-۲$
۴) $۲y+x=۱$

۵۳ مجموع تمام جملات دنباله با جمله عمومی $a_n=۳^{-n}\cos^n(\frac{n\pi}{۲})$ چقدر است؟

۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۹}$
۳) $\frac{۸}{۹}$
۴) $\frac{۱}{۸}$

۵۴ مشتق سوم تابع $y=(۳x-۱)^۳\sqrt[۳]{۶x-۱}$ به‌ازای $x=\frac{۱}{۳}$ کدام است؟

۱) ۱۶۲
۲) صفر
۳) ۲۷
۴) ۸۱

۵۵ مقدار مشتق تابع $f(x)=\frac{۱+x+\ldots+x^۷}{۱+x^۲}$ در نقطهٔ $x=-۱$ کدام است؟

۱) ۳
۲) -۳
۳) ۲
۴) -۲

۵۶ توپی را از ارتفاع ۶۴ متری رها می‌کنیم و هربار که زمین می‌خورد نصف ارتفاع قبل بالا می‌آید. این توپ در برخورد چندم با زمین ۱۹۰ متر را طی کرده‌است؟ (کل مسافتی که توپ بالا و پایین می‌رود را در نظر بگیرید.)

۱) ۶
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۷

۵۷ یک قایق کاملاً بادی، روزانه ۵ درصد بادش را از دست می‌دهد. باد این قایق پس از چند روز، به نصف باد روز اول می‌رسد؟
$(\log ۱۹=۱٫۲۸۷, \log ۲=۰٫۳۰۱)$

۱) ۱۷
۲) ۱۸٫۵
۳) ۲۱٫۵
۴) ۲۵

۵۸ تابع $f(x)=|x|(x^۲-۳)$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۵۹ تابع $f(x)=x^۳-۳x^۲-۲۴x$ بر بازه‌ی $I=(a,b)$ نزولی است و تقعر رو به بالا دارد. حداکثر $b-a$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۶۰ مجموع ضرایب مثبت بسط $(۷x-۳y)^{۱۰}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۰^{۱۰}}{۲}$
۲) $۴^{۱۰}$
۳) $\frac{۱۰^{۱۰}-۴^{۱۰}}{۲}$
۴) $\frac{۱۰^{۱۰}+۴^{۱۰}}{۲}$

۶۱ دو استوانه‌ی همگن A و B دارای جرم و ارتفاع مساوی‌اند. استوانه‌ی A توپر و استوانه‌ی B توخالی است. اگر شعاع خارجی این دو استوانه با هم برابر و شعاع داخلی استوانه‌ی B نصف شعاع خارجی آن باشد، چگالی استوانه‌ی A چند برابر چگالی استوانه‌ی B است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

۶۲ اختلاف فشار بین دو نقطه از مایعی درحال سکون ΔP است. اگر ظرف محتوی این مایع با شتاب $\frac{g}{۳}$ در راستای قائم به طرف پایین حرکت کند، اختلاف فشار بین این دو نقطه کدام خواهد بود؟

۱) ΔP
۲) $\frac{۱}{۳}\Delta P$
۳) $\frac{۲}{۳}\Delta P$
۴) $\frac{۴}{۳}\Delta P$

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

۶۳ در یک آزمایش مربوط به تداخل امواج نوری، فاصله‌ی یکی از نوارها از نوار روشن مرکزی ۵ برابر پهنای هر یک از نوارهاست. این نوار کدام است؟

۱) سومین نوار روشن ۲) پنجمین نوار روشن ۳) سومین نوار تاریک ۴) پنجمین نوار تاریک

۶۴ با استفاده از یک نور تکفام آزمایش یانگ انجام شده است. اگر فاصله‌ی دو شکاف $0/2mm$ و فاصله‌ی صفحه‌ی دو روزنه تا پرده‌ی مشاهده $3m$ و فاصله‌ی دو نوار تاریک متوالی $1cm$ باشد، اختلاف راه دو پرتویی که نوار روشن پنجم را تشکیل می‌دهند، چند آنگستروم است؟

۱) $3\times10^{4}A^{\circ}$ ۲) $\frac{1}{3}\times10^{4}A^{\circ}$ ۳) $2\times10^{4}A^{\circ}$ ۴) $\frac{1}{2}\times10^{4}A^{\circ}$

۶۵ فشار گاز درون کپسولی $1/3$ اتمسفر است. دهانه‌ی آن را به فشارسنج پیمانه‌ای می‌بندیم که درون فشار سنج مایعی به چگالی $12000\ kg/m^3$ موجود است. وقتی شیر گاز را باز می‌کنیم، اختلاف ستون مایع در دو لوله چند سانتی‌متر خواهد شد؟ ($P_0=10^5 pa$ فشار هوا)

۱) ۱۲/۵ ۲) ۳۰ ۳) ۵۰ ۴) ۲۵

۶۶ اگر در ظرف الکل داده شده $50cm^3$ جیوه بریزیم، نیروی وارد از طرف جیوه به کف ظرف چند نیوتون افزایش می‌یابد؟ ($\rho_{جیوه}=14000\ \frac{kg}{m^3}$, $\rho_{الکل}=80\ \frac{kg}{m^3}$)

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۷ ۴) باید مساحت کف ظرف معلوم باشد.

۶۷ در آزمایش یانگ، فاصله‌ی دو شکاف از هم $1mm$ و فاصله‌ی پرده تا سطح دو شکاف $1m$ و فاصله‌ی هشتمین نوار روشن تا نوار روشن مرکزی $4mm$ است. نورهایی که از دو شکاف به وسط هشتمین نوار روشن می‌رسند، چند ثانیه با هم اختلاف زمانی دارند؟ ($c=3\times10^8\ \frac{m}{s}$)

۱) $\frac{4}{3}\times10^{-16}$ ۲) $\frac{5}{3}\times10^{-16}$ ۳) $\frac{5}{3}\times10^{-15}$ ۴) $\frac{4}{3}\times10^{-14}$

۶۸ در مخلوطی از آب و یخ، مقداری یخ ذوب می‌شود و حجم مخلوط $5cm^3$ کاهش می‌یابد. جرم یخ ذوب شده چند گرم است؟ ($\rho_{یخ}=0/9\ \frac{g}{cm^3}$ و $\rho_{آب}=1\ \frac{g}{cm^3}$)

۱) ۴/۵ ۲) ۵ ۳) ۴۵ ۴) ۵۰

۶۹ آزمایش یانگ را با نور تک‌رنگ سبز انجام داده‌ایم و نوارهای تداخلی را بر روی پرده‌ای موازی با سطح شکاف‌ها تشکیل داده‌ایم. برای آن‌که فاصله‌ی دو نوار تاریک متوالی را کم کنیم می‌توانیم:

۱) فاصله‌ی دو شکاف را از هم کم کنیم.
۲) فاصله‌ی پرده از شکاف‌ها را زیاد کنیم.
۳) به جای نور سبز از نور تک‌رنگ قرمز استفاده کنیم.
۴) به جای نور سبز از نور تک‌رنگ بنفش استفاده کنیم.

۷۰ در آزمایش یانگ اگر اختلاف فاصله وسط دومین نوار روشن از دو شکاف نور، ۱۰۰۰ نانومتر باشد، اختلاف فاصله وسط سومین نوار تاریک از دو شکاف چند نانومتر است؟

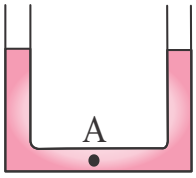
۱) ۷۵۰ ۲) ۱۲۵۰ ۳) ۱۵۰۰ ۴) ۱۷۵۰

۷۱ اگر معادله‌ی تغییرات اندازه‌ی میدان مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی که در محیط شفاف در حال انتشار است، در SI به صورت $B=B_m\sin 4\pi\times10^{14}(t-\frac{5}{4}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}x)$ باشد، ضریب شکست این محیط شفاف کدام است؟ (c، سرعت انتشار موج الکترومغناطیسی در خلاء است و برابر با $3\times10^8\ \frac{m}{s}$ می‌باشد.)

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

۷۲ در شکل روبه‌رو، سطح مقطع لوله در هر طرف برابر $۲cm^۲$ است و در لوله جیوه ریخته شده است. اگر در یکی از شاخه‌ها روی جیوه ۶۸ گرم آب بریزیم، فشار در نقطه A چند سانتی‌متر جیوه افزایش می یابد؟ (چگالی جیوه و آب به ترتیب $۱۳٫۶\frac{g}{cm^۳}$ ، $۱\frac{g}{cm^۳}$ است.)

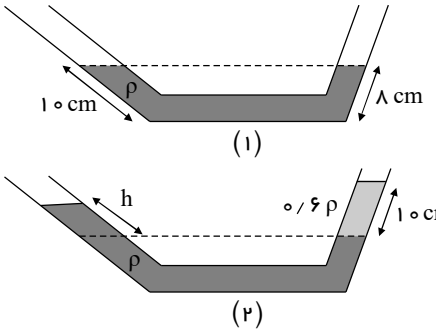


۱) ۱٫۲۵
۲) ۲٫۵۰
۳) ۳٫۷۵
۴) ۴٫۵۰

۷۳ شعاع یک کره فلزی ۵ سانتی‌متر و جرم آن ۱۰۸۰ گرم و چگالی آن $۲٫۷\frac{g}{cm^۳}$ است. درون این کره یک حفره وجود دارد. حجم این حفره چند درصد حجم کره را تشکیل می‌دهد؟ $(\pi = ۳)$

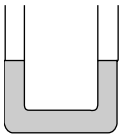
۱) ۱۰
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۲۵

۷۴ در شکل (۱)، مایع با چگالی ρ در حالت تعادل است. اگر در شاخه‌ی سمت راست، $۱۰cm$ مایعی با چگالی $۰٫۶\rho$ بریزیم، پس از ایجاد تعادل، h چند سانتی‌متر است؟



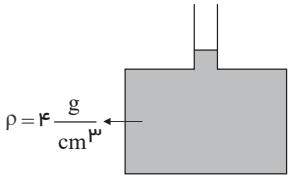
۱) ۶
۲) ۷٫۵
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۷۵ در شکل زیر، سطح مقطع لوله‌ی U شکل در هر دو طرف برابر با $۲cm^۲$ است و در لوله‌ی جیوه ریخته شده است. اگر در یکی از لوله‌ها به اندازه‌ی $۵۴٫۴g$ آب بریزیم، پس از ایجاد تعادل، اختلاف ارتفاع سطح جیوه در دو طرف لوله چند سانتی‌متر می‌شود؟ $(\rho_{آب} = ۱\frac{g}{cm^۳}\ ,\ \rho_{جیوه} = ۱۳٫۶\frac{g}{cm^۳})$



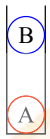
۱) ۱
۲) ۱٫۵
۳) ۲
۴) ۲٫۲۵

۷۶ در شکل زیر، قطر استوانه‌های بالا و پایین ظرف به ترتیب $۲cm$ و $۸۰cm$ می‌باشد. اگر $۱۰۰cm^۳$ از مایع موجود در ظرف به آن اضافه کنیم، نیرویی که بر کف ظرف وارد می‌شود، چند نیوتون افزایش می‌یابد؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$



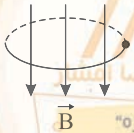
۱) ۴
۲) ۴۰
۳) ۱۶۰
۴) ۶۴۰۰

۷۷ در شکل زیر دو گلوله‌ی A و B کاملاً مشابه و دارای بار الکتریکی هم‌نام و برابر می‌باشند. هنگامی که گلوله‌ی A به تنهایی درون استوانه قائم است. فشاری معادل $۴۰Pa$ به کف استوانه وارد می‌کند. با رها کردن گلوله‌ی B درون استوانه. در ۲ میلی‌متری گلوله‌ی A، گلوله‌ی B به تعادل می رسد، در این حالت فشار گلوله‌ی A به کف استوانه چند پاسکال خواهد بود؟(اصطکاک ناچیز است و $g = ۱۰\frac{N}{kg}$)



۱) ۴۰
۲) ۸۰
۳) ۶۰
۴) اطلاعات مساله کافی نیست.

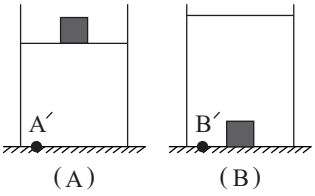
۷۸ در شکل زیر چنان‌چه بزرگی میدان مغناطیسی کاهش یابد، میدان الکتریکی در نقطه‌ی A در کدام جهت برقرار می‌شود؟



۱) در جهت بالا
۲) در جهت پایین
۳) درون‌سو
۴) برون‌سو

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

۷۹ مطابق شکل در حالت A وزنه‌ی آهنی توپُری، روی پیستونی به جرم ناچیز روی ظرف پُر از آبی قرار دارد. اگر در حالت B وزنه‌ی آهنی را داخل ظرف بیندازیم، کدام گزینه در مورد مقایسه‌ی فشار آب در کف ظرف (نقاط A' و B') در حالت‌های A و B صحیح است؟



۱) $P_{A'} > P_{B'}$
۲) $P_{A'} < P_{B'}$
۳) $P_{A'} = P_{B'}$
۴) نمی‌توان اظهارنظر قطعی کرد.

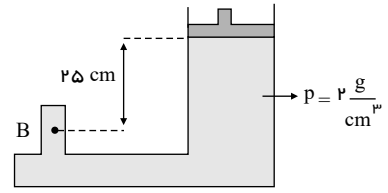
۸۰ دو مکعب به ابعاد یکسان که از فلزی به چگالی $۸\frac{g}{cm^۳}$ ساخته شده‌اند، داریم. اگر در یکی از مکعب‌ها حفره‌ای وجود داشته باشد و جرم مکعب ها برابر با $۶۰۰g$ و $۴۸۰g$ باشد، حجم حفره‌ی داخل مکعب چند سانتی‌متر مکعب است؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۵

۸۱ در عمق ۳ متری از یک مایع، فشار کل برابر با ۲۷۵ سانتی‌متر جیوه است. اگر فشار هوا روی سطح مایع برابر با $۷۵cmHg$ و چگالی جیوه $۱۳۵۰۰\frac{kg}{m^۳}$ باشد، چگالی این مایع چند واحد SI است؟

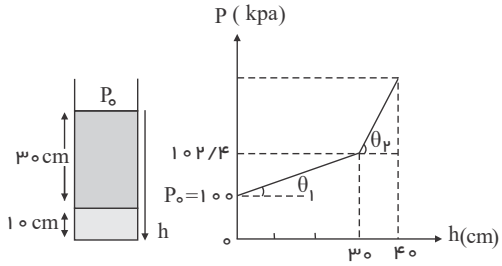
۱) ۱۸۰۰ ۲) ۶۰۰۰ ۳) ۹۰۰۰ ۴) ۴۵۰۰

۸۲ در شکل زیر، جرم پیستون $۲۰kg$، سطح مقطع آن $۴cm^۲$ و چگالی مایع $۲\frac{g}{cm^۳}$ است. اختلاف فشار نقطه‌ی B با فشار هوای محیط چند کیلوپاسکال است؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$



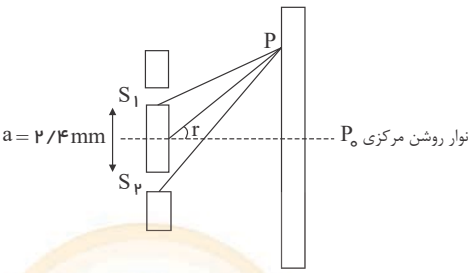
۱) ۵ ۲) ۱۰
۳) ۵۵ ۴) ۵۰۵

۸۳ در ظرفی مطابق شکل زیر، دو مایع مخلوط نشدنی وجود دارد. اگر نمودار تغییرات فشار برحسب عمق دو مایع مطابق شکل زیر باشد و $\tan\theta_۲ = ۱۷\tan\theta_۱$ باشد، $\rho_۱$ و $\rho_۲$ در SI کدام‌اند؟



۱) ۶۰۰ و ۱۰۲۰۰
۲) ۷۵۰ و ۱۲۷۵۰
۳) ۸۰۰ و ۱۳۵۰۰
۴) ۸۰۰ و ۱۳۶۰۰

۸۴ در آزمایش یانگ شکل مقابل نقطه‌ی P وسط نوار روشن بیستم است. اگر طول موج نور آزمایش برابر با $۰/۶\mu m$ باشد، در این صورت γ چند درجه است؟ $(\pi = ۳)$



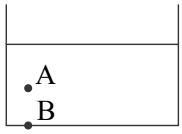
۱) ۰/۳
۲) ۳
۳) ۰/۵
۴) ۵

۸۵ یک لولهٔ باریک به قطر داخلی $۱mm$ و ارتفاع یک متر موجود است. وقتی $۴۰cm$ از این لوله را به‌صورت قائم درون آب فرو می‌بریم، آب در لوله نسبت به سطح آزاد خود $۲۰cm$ بالا می‌آید. عامل بالا رفتن آب در لولهٔ باریک چیست و اندازهٔ آن چند واحد SI است؟ $(\pi = ۳، \rho_{آب} = ۱\frac{g}{cm^۳})$ و $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$

۱) نیروی هم‌چسبی، $۱/۵ \times ۱۰^{-۶}$ ۲) نیروی هم‌چسبی، $۱/۵ \times ۱۰^{-۳}$ ۳) نیروی دگرچسبی، $۱/۵ \times ۱۰^{-۶}$ ۴) نیروی دگرچسبی، $۱/۵ \times ۱۰^{-۳}$

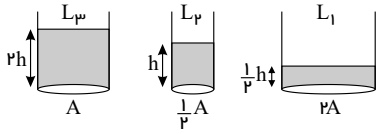
استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

۸۶ در شکل زیر قسمتی از استوانهٔ قائم تا ارتفاع مشخصی از آب خالص با دمای $۱^\circ C$ پرشده است. نقطهٔ A در فاصله‌ی ثابتی از کف ظرف و نقطهٔ B در کف ظرف قرار دارد. اگر دمای آب را $۲^\circ C$ افزایش دهیم، فشار آب در نقاط B و A، به ترتیب از راست به چپ، چگونه تغییر می‌کند؟ (از تغییر حجم ظرف صرف نظر کنید.)



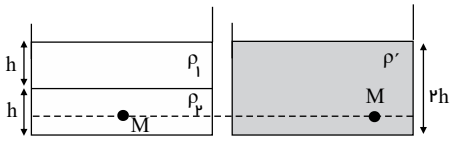
۱) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
۲) تغییر نمی‌کند، کاهش می‌یابد.
۳) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد.
۴) تغییر نمی‌کند، افزایش می‌یابد.

۸۷ مطابق شکل‌های روبه‌رو، درون سه ظرف استوانه‌ای، جرم‌های مساوی از سه مایع مخلوط نشدنی $L_۱$ ، $L_۲$ و $L_۳$ ریخته شده است. اگر این سه مایع را درون یک ظرف به اندازهٔ کافی بزرگ بریزیم، کدام شکل ترتیب قرار گیری مایع‌ها در این سه ظرف را به درستی نشان می‌دهد؟ (دما ثابت و یکسان است.)



۱) $L_۱$ / $L_۲$ / $L_۳$
۲) $L_۳$ / $L_۲$ / $L_۱$
۳) $L_۳$ / $L_۱$ / $L_۲$
۴) $L_۲$ / $L_۱$ / $L_۳$

۸۸ باتوجه به شکل زیر، اگر مایع‌های مخلوط‌نشدنی با چگالی‌های $\rho_۱$ و $\rho_۲$ را برداشته و به‌جای آن مایعی با چگالی $\rho' = \frac{\rho_۱ + \rho_۲}{۲}$ درون ظرف بریزیم، فشار مایع در نقطهٔ M چگونه تغییر می‌کند؟

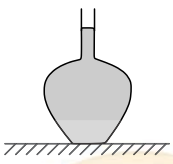


۱) افزایش می‌یابد.
۲) کاهش می‌یابد.
۳) ثابت می‌ماند.
۴) بستگی به $\rho_۱$ و $\rho_۲$ دارد.

۸۹ در یک لولهٔ Uشکل تا ارتفاع معینی جیوه وجود دارد. اگر بر روی یکی از شاخه‌ها آب بریزیم تا بعد از تعادل جیوه در شاخهٔ مقابل $۶cm$ نسبت به وضعیت قبل بالا رود، ارتفاع آب برحسب سانتی‌متر کدام گزینه است؟ ($g = ۱۰\frac{N}{kg}$ و چگالی آب و جیوه به‌ترتیب $۱\frac{g}{cm^۳}$ و $۱۳٫۵\frac{g}{cm^۳}$ فرض شود.)

۱) ۳۴
۲) ۸۱
۳) ۱۳۶
۴) ۱۶۲

۹۰ در شکل زیر، مساحت سطح مقطع ظرف محتوی آب در قسمت باریک آن برابر با $۲۰cm^۲$ و در کف ظرف برابر با $۱۰۰cm^۲$ است. اگر $۷۰cm^۳$ آب به آب درون ظرف اضافه کنیم، افزایش نیروی وارد بر کف ظرف چند نیوتون خواهد شد؟ ($\rho_{آب} = ۱\frac{g}{cm^۳}$ و $g = ۱۰\frac{N}{kg}$)



۱) ۳٫۵
۲) ۷
۳) ۳۵۰
۴) ۷۰۰

۹۱ با توجه به مقدار E° ها، کدام واکنش به صورتی که معادله‌ی آن نوشته شده است ، انجام می‌پذیرد؟

$E^\circ(Cu^{۲+}(aq)/Cu(s)) = +۰٫۳۴V$
$E^\circ(Fe^{۲+}(aq)/Fe(s)) = -۰٫۴۴V$
$E^\circ(Mg^{۲+}(aq)/Mg(s)) = -۲٫۳۸V$

@Alirezaafsharofficial

۱) $Fe(s) + CuCl_۲(aq) \rightarrow FeCl_۲(aq) + Cu(s)$
۲) $Fe(s) + MgCl_۲(aq) \rightarrow FeCl_۲(aq) + Mg(s)$
۳) $Cu(s) + ۲HCl(aq) \rightarrow CuCl_۲(aq) + H_۲(s)$
۴) $Cu(s) + MgCl_۲(aq) \rightarrow CuCl_۲(aq) + Mg(s)$

۹۲ با توجه به واکنش‌های زیر و مقدار ΔH° آن‌ها،

$$\begin{cases} H_2S(g)+\frac{3}{2}O_2(g)\rightarrow H_2O(l)+SO_2(g), \Delta H^\circ=-562/6kJ \\ CS_2(l)+3O_2(g)\rightarrow CO_2(g)+2SO_2(g), \Delta H^\circ=-1075/2kJ \end{cases}$$

برای تشکیل هر مول $H_2S(g)$ مطابق واکنش: $CS_2(l)+2H_2O(l)\rightarrow CO_2(g)+2H_2S(g)$، چند کیلوژول گرما صرف می‌شود؟

۱) ۴۵ ۲) ۲۵ ۳) ۳۵ ۴) ۵۰

۹۳ کدام گزینه درباره اسیدها و بازها نادرست است؟ (با کمی تغییر)

۱) برای افزایش میزان اسیدی بودن خاک به آن آهک اضافه می‌کنند.

۲) مولکول آمونیاک با دربرداشتن سه اتم هیدروژن، در آب خاصیت اسیدی ندارد.

۳) با حل شدن ۰/۰۵ مول سدیم اکسید در یک لیتر آب، pH محلول به ۱۳ می‌رسد.

۴) مولکول استیک‌اسید، تنها یک هیدروژن اسیدی در آب دارد و اسیدی ضعیف است.

۹۴ آنتالپی واکنش گازی : $4NH_3(g)+5O_2(g)\rightarrow 4NO(g)+6H_2O(g)$ بر اساس گرمای تشکیل واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها که داده شده است، چند کیلوژول است؟

$$\Delta H_f^\circ[NO(g)]=+90kJmol^{-1} \quad , \quad \Delta H_f^\circ[NH_3(g)]=-26kJmol^{-1} \quad , \quad \Delta H_f^\circ[H_2O(g)]=-242kJmol^{-1}$$

۱) $+864$ ۲) $+884$ ۳) -968 ۴) -988

۹۵ اگر واکنش (I) انجام‌پذیر ولی واکنش (II) انجام‌ناپذیر باشد، .....

$$\begin{cases} I) A^{2+}(aq)+B(s)\rightarrow A(s)+B^{2+}(aq) \\ II) B(s)+D^{2+}(aq)\rightarrow B^{2+}(aq)+D(s) \end{cases}$$

۱) پتانسیل الکترودی D بزرگ‌تر از پتانسیل الکترودی B است.

۲) ترتیب کاهندگی این فلزها، به صورت: $A>D>B$ است.

۳) ترتیب اکسندگی کاتیون‌های سه فلز به‌صورت $B^{2+}>A^{2+}>D^{2+}$ است.

۴) محلول نمک‌های A را نمی‌توان در ظروف ساخته شده از فلز D نگهداری نمود.

۹۶ دلیل این که واکنش $N_2O_4(g)\rightarrow 2NO_2(g)\ ,\ \Delta H=+58\ kJ$ در یک دمای مناسب تا حدی خودبه‌خود پیشرفت می‌کند، کدام است؟ (المپیاد شیمی ۸۲)

۱) افزایش سطح آنتالپی طی پیشرفت واکنش

۲) افزایش بی‌نظمی طی پیشرفت واکنش

۳) غالب بودن عامل ΔH واکنش بر عامل ΔS آن

۴) جنب و جوش بیش‌تر هر مولکول NO_2 در مقایسه با N_2O_4

۹۷ اگر pH دو محلول جداگانه از اتانوییک اسید $(K_a\approx 2\times 10^{-5})$ و کلرواتانوییک اسید $(K_a\approx 2\times 10^{-3})$، برابر ۳ باشد، نسبت غلظت مولار محلول اسید قوی به غلظت مولار محلول اسید ضعیف، به تقریب کدام است؟

۱) ۰/۰۱ ۲) ۰/۰۳ ۳) ۰/۱ ۴) ۰/۳

۹۸ ظرفیت گرمایی ۵۰۰mL اتانول با چگالی ۰/۶۹g/mL^{-1} برابر ۸۶۲/۵ ژول بر درجه‌ی سلسیوس است ظرفیت گرمایی مولی اتانول تقریباً چند ژول بر مول بر درجه‌ی سلسیوس است؟

$(C=12, H=1, O=16; g\cdot mol^{-1})$

۱) ۹۲ ۲) ۹۸ ۳) ۱۱۵ ۴) ۷۵/۴

۹۹ اگر pH محلول اسید ضعیف HA که در هر میلی‌لیتر آن $2/5\times 10^{-7}$ مول از آن موجود دارد برابر ۵ باشد، درصد تفکیک یونی آن در شرایط آزمایش، کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۲ ۳) ۴ ۴) ۳

"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

۱۰۰ با توجه به واکنش‌های زیر برای تشکیل ۱۹۶ گرم فسفریک اسید از عناصر سازنده اش چند کیلوژول گرما با محیط مبادله می‌شود؟

$(H = ۱, O = ۱۶, P = ۳۱ g \cdot mol^{-۱})$

الف) $P_۴O_{۱۰}(s) \rightarrow P_۴(s) + ۵O_۲(g) \quad \Delta H_۱ = akJ$

ب) $H_۲O(l) \rightarrow H_۲(g) + \frac{۱}{۲}O_۲(g) \quad \Delta H_۲ = \frac{b}{۳}kJ$

پ) $P_۴O_{۱۰}(s) + ۶H_۲O(l) \rightarrow ۴H_۳PO_۴(aq) \quad \Delta H_۳ = ckJ$

۱) $\frac{c-a-۲b}{۴}$ ۲) $c-۳a-۲b$ ۳) $c-a-۲b$ ۴) $\frac{c-a-۲b}{۲}$

۱۰۱ ۰٫۵ لیتر محلول استیک اسید $(CH_۳COOH)$ ، با $pH = ۳٫۳$ و درصد یونش ۲٫۵ درصد، به تقریب با چند لیتر محلول باریم هیدروکسید با $pH = ۱۲$ به طور کامل واکنش می‌دهد؟ $(\log ۲ \simeq ۰٫۳ , \log ۳ \simeq ۰٫۵ , \log ۵ \simeq ۰٫۷)$

۱) ۱ ۲) ۰٫۵ ۳) ۲ ۴) ۰٫۴

۱۰۲ چند مورد از مطالب زیر، درست‌اند؟

- در بدن سوسک بمب‌افکن، $C_۶H_۶O_۲$ به $C_۶H_۴O_۲$ تبدیل می‌شود.
- محفظه انجام واکنش در گرماسنج بمبی نوع سامانه منزوی به شمار می‌رود.
- مرحله اول واکنش تولید آمونیاک (از دو گاز $N_۲$ و $H_۲$) گرماگیر است و ΔH آن را می‌توان با گرماسنج لیوانی اندازه‌گیری کرد.
- واکنش سوختن کربن (گرافیت) را که به تشکیل $CO(g)$ منجر می‌شود، می‌توان به روش تجربی انجام داد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۳ چند مورد از مطالب زیر درست است؟

آ) مقدار K_W در شرایط استاندارد ترمودینامیکی (در صورتی که دما $۲۵^\circ C$ باشد) بیش‌تر از مقدار آن در شرایط STP است.

ب) باز مزدوج آشناترین کربوکسیلیک اسید ناپایدارتر از باز مزدوج ساده‌ترین کربوکسیلیک اسید است.

پ) محلولی که در آن $[H_۳O^+] = ۱۰^{-۱} mol \cdot L^{-۱}$ است، در متیل سرخ و آب کلم سرخ به رنگ سرخ در می‌آید.

ت) کربوکسیلیک اسیدی که در تمشک وجود دارد نسبت به جوهر مورچه به اندازهٔ جرم مولی $C_۶H_۴$ سنگین‌تر است.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۰۴ آنتالپی استاندارد سوختن ساکاروز $(C_{۱۲}H_{۲۲}O_{۱۱})$ برابر $۵۶۵۰ kJ \cdot mol^{-۱}$ است. اگر ظرفیت گرمایی اجزاء سازنده‌ی گرماسنج را $۱٫۲ kJ \cdot {}^\circ C^{-۱}$ در نظر بگیریم و گرماسنج حاوی $۵۰۰ g$ آب باشد، تقریباً چند گرم ساکاروز را در این گرماسنج بسوزانیم تا دمای گرماسنج و محتویاتش $۱۰^\circ C$ افزایش یابد؟

$(C = ۱۲ , H = ۱ , O = ۱۶ : g \cdot mol^{-۱} , C_{H_۲O} = ۴٫۲ Jg^{-۱} \cdot {}^\circ C^{-۱})$

۱) ۰٫۷۳ ۲) ۱٫۲۷ ۳) ۲ ۴) ۰٫۵۴

۱۰۵ فرض می‌کنیم در سلول گالوانی $(Zn - H_۲)$ الکترولیت نیم‌سلول کاتدی شامل ۵ لیتر هیدروکلریک اسید یک مولار باشد. پس از گذشت t ثانیه از شروع کارکرد این سلول، $۶٫۰۲۲ \times ۱۰^{۲۳}$ الکترون در طول انجام واکنش در آن مبادله می‌شود. در این مدت زمان چه مقدار بر جرم الکترود کاتدی افزوده می‌شود و غلظت الکترولیت کاتدی به چند مولار می‌رسد؟

۱) $۰٫۸M - ۲g$ ۲) ثابت می‌ماند – $۰٫۸M$ ۳) $۰٫۴M - ۲g$ ۴) ثابت می‌ماند – $۰٫۴M$

۱۰۶ در بین جمله‌های زیر چند جمله صحیح وجود دارد؟

- گاز هلیم می‌تواند هر سه نوع حرکت انتقالی، چرخشی و ارتعاشی را داشته باشد.
- تبدیل الماس به گرافیت یک فرایند گرماده است.
- در یک سامانه منزوی میانگین سرعت حرکت ذرات با گذشت زمان ثابت باقی می‌ماند.
- در مقایسه دو جسم با جرم برابر، هر کدام ظرفیت گرمایی مولی کم‌تری داشته باشد، زودتر داغ می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

۱۰۷ درصد یونش اسید ضعیف HA، ۰٫۴ برابر درصد یونش محلول ۴×۱۰^{-۳} مولار استیک اسید با $pH = ۳٫۷$ است. غلظت مولی محلول HA، چند مول بر لیتر است؟ $(K_a(HA) = ۲ \times ۱۰^{-۵})\ (\log ۲ = ۰٫۳)$

۱) ۲×۱۰^{-۱} ۲) ۵×۱۰^{-۲} ۳) $۱۰^{-۳}$ ۴) $۱٫۲۸ \times ۱۰^{-۳}$

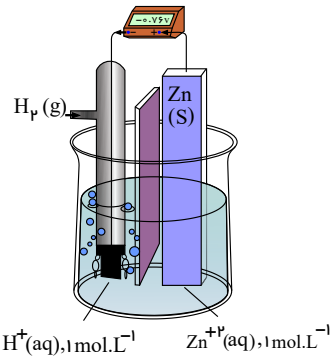
۱۰۸ با استفاده از داده‌های زیر ΔG واکنش زیر در دمای $۲۷^\circ C$ برابر چند کیلوژول است؟

$$۲H_۲O_۲(aq) \rightarrow ۲H_۲O(l) + O_۲(g) \Delta S = ۱۴۰ J/K^{-۱}$$

فرمول شیمیایی	$\Delta H^\circ\ (KJ \cdot mol^{-۱})$ تشکیل
$H_۲O$	-۲۸۶
$H_۲O_۲$	$-۱۹۱٫۵$

۱) -۲۳۱ ۲) $+۲۳۱$ ۳) $-۱۹۲٫۷۸$ ۴) $+۱۹۲٫۷۸$

۱۰۹ اگر در شرایط استاندارد در شکل زیر از آند $۶٫۰۲۲ \times ۱۰^{۲۲}$ الکترون خارج شده باشد، چند لیتر گاز هیدروژن تولید شده است؟



۱) ۱۱۲
۲) ۱٫۱۲
۳) ۲۲۴
۴) ۲٫۲۴

۱۱۰ اگر رابطهٔ ظرفیت گرمایی ویژه سه ماده A، B و C به صورت $c_A = ۲c_B = ۳c_C$ و رابطه بین جرم مولی آن‌ها به صورت $M_C = ۲M_B = ۳M_A$ باشد، آنگاه کدام یک از رابطه‌های زیر در مورد ظرفیت گرمایی مولی (C) این سه ماده نادرست است؟

۱) $C_A = C_C$ ۲) $C_B > C_A$ ۳) $C_C > C_B$ ۴) $C_C = \frac{۴}{۳} C_B$

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

پاسخ‌نامه تشریحی

۷

۱ ۲ ۳ ۴ **۱**

چون به ازای جمیع مقادیر صحیح و مثبت k مسأله برقرار است بنابراین به ازای $k=1$ مسأله را حل می کنیم. یعنی کافی است باقیمانده تقسیم 2^{35} بر ۷ را بیابیم.

قضیه فرما: اگر p عددی اول باشد و $(a,p)=1$ آنگاه $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$

$$2^6 \overset{7}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{توان } 5} 2^{30} \overset{7}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 2^5} 2^{35} \overset{7}{\equiv} 1 \times 2^5 = 32 \overset{7}{\equiv} 4$$

راه حل دوم: از توان های کوچک شروع می کنیم تا به توان دلخواه برسیم.

$$2^3 \overset{7}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{توان } 11} 2^{33} \overset{7}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{توان } k} 2^{33k} \overset{7}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 2^2} 2^{33k+2} \overset{7}{\equiv} 1 \times 2^2 = 4$$

متوسط

۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$T(x,y)=(x',y') \Rightarrow \begin{cases} x-2=x' \\ y+a=y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x'+2 \\ y=y'-a \end{cases}$$

پس از جایگزین کردن در معادله $3x+4y=5$ داریم:

$$3(x'+2)+4(y'-a)=5$$

چون انتقال یافته‌ی خط از نقطه $(2,5)$ می گذرد داریم:

$$3(5+2)+4(2-a)=5 \Rightarrow a=6$$

متوسط

۳ ۱ ۲ ۳ ۴ **۱**

اگر دو نقطهٔ A, B باشند آنگاه مختصات آن دو نقطهٔ $A\big|_{a+3}^{1}$, $B\big|_{a-3}^{-1}$ می‌باشد.

اگر خطی بر منحنی مماس باشد معادلهٔ تلاقی آن با منحنی ریشهٔ مضاعف دارد پس ابتدا معادلهٔ خط مذکور را می نویسیم:

$$m_{AB}=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{a+3-a+3}{2}=\frac{6}{2}=3 \Rightarrow y-(a+3)=3(x-1) \Rightarrow y=3x+a$$

حال معادلهٔ این خط را با منحنی تلاقی می‌دهیم: (معادلهٔ تلاقی باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد.)

$$x^3+ax^2+2x=3x+a \Rightarrow x^3+ax^2-x-a=0 \Rightarrow x^2(x+a)-(x+a)=0$$

$$(x+a)(x^2-1)=0 \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \\ x=-a \end{cases} \Rightarrow a=-1, a=1$$ برای وجود ریشهٔ مضاعف باید ریشه‌های دو پرانتز برابر باشند.

سخت

۴ ۱ ۲ ۳ ۴ **۳**

عددی بر ۴ بخشپذیر است که دو رقم سمت راست آن بر ۴ بخشپذیر باشد.

عددی بر ۹ بخشپذیر است که دو رقم سمت راست آن بر ۹ بخشپذیر باشد.

دقت: $0 \le x \le 9$, $1 \le y \le 9$

$$\overline{y45x} \overset{36}{\equiv} 0 \Rightarrow \begin{cases} \overline{y45x} \overset{9}{\equiv} 0 \\ \overline{y45x} \overset{4}{\equiv} 0 \end{cases}$$

چون $\overline{y45x} \overset{4}{\equiv} 0$ پس باید $\overline{5x} \overset{4}{\equiv} 0$ باشد. بنابراین x فقط می‌تواند ۲ یا ۶ باشد (چون ۵۲ و ۵۶ بر ۴ بخش‌پذیرند)

$$x=2 \Rightarrow \overline{y452} \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow 2+5+4+y \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow y \overset{9}{\equiv} 7 \Rightarrow y=7 \Rightarrow 2x+3y=25$$

$$x=6 \Rightarrow \overline{y456} \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow 6+5+4+y \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow y \overset{9}{\equiv} 3 \Rightarrow y=3 \Rightarrow 2x+3y=21$$

پس حداکثر مقدار $2x+3y$ برابر ۲۵ است.

سخت

۵ ۱ ۲ ۳ ۴ **۳**

قرینه ی $A(x,y)$ نسبت به نقطه‌ی $(1,2)$ نقطه‌ی $A'(x',y')$ می‌باشد.

پس $(1,2)=\frac{A+A'}{2}$ در نتیجه $A'=2(1,2)-A$

در معادله خط داده شده جایگزین می کنیم: $(x',y')=(2-x,4-y) \Rightarrow \begin{cases} x=2-x' \\ y=4-y' \end{cases} \Rightarrow$

$$4-y'=3(2-x')+5 \Rightarrow y'=3x'-7$$

متوسط

۶ ۱ ۲ ۳ ۴ **۴**

نکته: اگر A ماتریس مربعی مرتبه $n \times n$ بوده و k عددی حقیقی باشد: $|kA|=k^n|A|$

$$A^2=A+I \text{ و } |A|=-1$$

$$(A+2I)^2=A^2+4A+4I=A^2+4\underbrace{(A+I)}_{A^2}=5A^2$$

استاد علیرضا افشار
مشاوره
@Alirezaafsharofficial

$$|A+۲I|^۲=|۵A^۲|=۵^۳|A^۲|=۵^۳|A|^۲=۱۲۵\times(-۱)^۲=۱۲۵\Rightarrow|A+۲I|=\pm\sqrt{۱۲۵}=\pm۵\sqrt{۵}$$

سخت

۷ ۱ ۲ ۳ ۴ برای هر دو عددی سه حالت ممکن است. یا برابرند یا یکی بزرگ تر از دیگری است. در این مسأله که شرایط یکسانی بر x,y حکم فرماست، تعداد جواب های $x>y$ برابر با تعداد جواب های $y>x$ است. پس کافی است کل جواب ها را بیابیم و از جواب های برابر کم کرده و تقسیم بر ۲ کنیم.

$$(۱)\ \text{کل جواب ها}=\binom{۸+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۱۰}{۲}=۴۵$$

$$(۲)\ x=y\Rightarrow ۲x+z=۸\Rightarrow \text{جواب ها}\ (x,y):(۰,۸)\ ,\ (۱,۶)\ ,\ (۲,۴)\ ,\ (۳,۲)\ ,\ (۴,۰)\Rightarrow ۵\ \text{جواب}$$

$$\Rightarrow x<y\ \text{جواب های با شرط}=\frac{۴۵-۵}{۲}=۲۰\ \text{جواب}$$

سخت

۸ ۱ ۲ ۳ ۴ فرض کنیم $N(x,y)$ نقطه‌ای از خط d باشد، لذا اگر N' تصویر N تحت تبدیل T باشد، داریم:

$$N'=(x',y')=T(x,y)=(x+y,x-y)\Rightarrow\begin{cases}x+y=x'\\x-y=y'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{x'+y'}{۲}\\y=\frac{x'-y'}{۲}\end{cases}\Rightarrow\frac{x'-y'}{۲}=(m-۳)(\frac{x'+y'}{۲})+۲$$

$$x'-y'=(m-۳)x'+(m-۳)y'+۴\Rightarrow(m-۲)y'=(۴-m)x'-۴$$

دو خط بر هم عمودند پس حاصلضرب شیب آنها برابر -۱ می‌باشد.

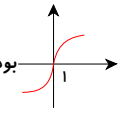
$$\left.\begin{matrix}\text{شیب خط اول}=m-۳\\ \text{شیب خط دوم}=\frac{۴-m}{m-۲}\end{matrix}\right\}\Rightarrow(m-۳)(\frac{۴-m}{m-۲})=-۱\Rightarrow -m^۲+۷m-۱۲=-m+۲\Rightarrow m^۲-۸m+۱۴=۰$$

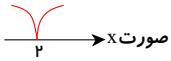
$$\Rightarrow m=\frac{+۸\pm\sqrt{۶۴-۵۶}}{۲}=\frac{+۸\pm۲\sqrt{۲}}{۲}$$

$$m=۴\pm\sqrt{۲}$$

سخت

۹ ۱ ۲ ۳ ۴ توجه: ریشه‌ی ساده‌ی رادیکال فرجه‌ی فرد عطف قائم و ریشه‌ی مضاعف رادیکال فرجه‌ی فرد نقطه‌ی بازگشتی است.

تابع در اطراف نقطه $x=۱$ به صورت $f(x)=\sqrt[۳]{(x-۱)(۱^۲)}$ می باشد که تابع به صورت 

بوده که عطف قائم است. همچنین در اطراف نقطه $x=۲$، تابع برابر $f(x)=\sqrt[۳]{(۲-۱)(x-۲)^۲}$ است که به صورت 

بوده که min است.

متوسط

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$(x+y+z+t)^{۱۰}=(۱+(-۲)+z+t)^{۱۰}=(z+t-۱)^{۱۰}$$

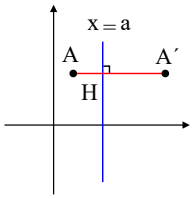
جملات این بسط بدین صورت خواهد بود که: $z^{a_۱}t^{a_۲}$ که در آن:

$$a_۱+a_۲\le ۱۰\ ,\ a_۱,a_۲\ge ۰\xrightarrow{\text{متغیر } a_۳ \text{ را اضافه می کنیم}}a_۱+a_۲+a_۳=۱۰\ ,\ a_۳\ge ۰$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب ها}=\binom{۱۰+۳-۱}{۳-۱}=۶۶$$

متوسط

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴ از نقطه‌ی $A(x,y)$ به خط $x=a$ عمود می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ی H قطع کند. همان طور که واضح است، نقطه‌ی H وسط پاره خط واصل بین A و تصویرش قرار می گیرد. لذا خواهیم داشت:



$$H=\frac{A+A'}{۲}\Rightarrow A'=۲H-A\Rightarrow A'=۲(a,y)-(x,y)$$

$$\Rightarrow A'=(۲a-x,y)$$

بنابراین ضابطه‌ی تبدیل به صورت $T(x,y)=(۲a-x,y)$ می‌باشد.

متوسط

۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم: هوپیتال: هرگاه $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=۰$ و $f(x)$ و $g(x)$ در $x=a$ مشتق پذیر باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

چون حد مخرج برابر صفر است پس باید صورت نیز برابر صفر باشد در غیر این صورت حاصل حد برابر بی‌نهایت خواهد بود.

$$\lim_{h\to ۰}f(h^۲+۱)-f(h^۲-۱)+۲=۰$$

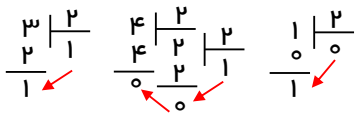
$$\Rightarrow f(۱)-f(-۱)+۲=۰\xrightarrow{f(۱)=۲b\ ,\ f(-۱)=۲a}۲b-۲a+۲=۰\Rightarrow a-b=۱\ \ (I)$$

"مشاوره" @Alirezaafshar_official

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(h^۲+۱)-f(h^۲-۱)+۲}{h^۲}=۴ \xrightarrow{HOP} \lim_{h\to ۰}\frac{۲h\cdot f'(h^۲+۱)-۲h\cdot f'(h^۲-۱)}{۲h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}(f'(۱+h^۲)-f'(h^۲-۱))=f'(۱+۰^+)-f'(۰^+-۱)=f'_+(۱)-f'_-(-۱)=۴$$
$$x>۱\to f(x)=ax-a+bx+b\to f'_+(۱)=a+b$$
$$x>-۱\Rightarrow f(x)=-ax+a+bx+b\to f'_+(-۱)=b-a$$
$$\Rightarrow f'_+(۱)-f_+(-۱)=(a+b)-(b-a)=۴\Rightarrow ۲a=۴\to a=۲\xrightarrow{I} b=۱\Rightarrow a+b=۳$$

سخت

۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴ چون $۲^۳=۸$ پس هر ۱ رقم در مبنای ۸ می‌تواند معادل سه رقم در مبنای ۲ باشد پس بازای هر رقم در مبنای ۸، سه رقم در مبنای ۲ تعریف کرده و آن رقم را با تقسیمات متوالی بر ۲ به مبنای ۲ می‌بریم.



$$A=(\underset{\downarrow}{۱}\quad \underset{\downarrow}{۴}\quad \underset{\downarrow}{۳})$$
$$A=(\underbrace{۰۰۱}\quad\underbrace{۱۰۰}\quad\underbrace{۰۱۱})_۲\Rightarrow A=(۱\quad ۱۰۰\quad ۰۱۱)_۲$$

متوسط

۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴ اگر دو خط منطبق باشند یا بر هم عمود باشند آنگاه در بازتاب، تصویر خط خودش می‌شود.

الف- اگر دو خط بر هم عمود باشند، شیب خط Δ برابر $(-\frac{۱}{۲})$ و شیب خط D برابر $(\frac{m}{۳-m})$ است. پس داریم:

$$(-\frac{۱}{۲})\times(\frac{m}{۳-m})=-۱\Rightarrow m=۲$$

نسبت تجانس $=\frac{۱}{m}=\frac{۱}{۲}$

ب- اگر دو خط بر هم منطبق باشند، در این صورت داریم:

$$\frac{m}{۱}=\frac{m-۳}{۲}=\frac{۲}{۱}$$

که مقدار واحدی برای m به دست نمی‌آید.

سخت

۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم: $\log^A+\log^B=\log^{A\cdot B}$

مجموع دو تابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x)+g(x)=\log(۲\sin x-\sqrt{۴\sin^۲x-۲})+\log(۲\sin x+\sqrt{۴\sin^۲x-۲})$$
$$=\log(۴\sin^۲x-۴\sin^۲x+۲)=\log ۲\Rightarrow f'(x)+g'(x)=۰$$

یعنی به ازای هر x عضو دامنهٔ f و g، $f'(x)=-g'(x)$، بنابراین داریم:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=-۱\Rightarrow\frac{f'(\frac{\pi}{۳})}{g'(\frac{\pi}{۳})}=\frac{f'(\frac{\pi}{۳})}{-f'(\frac{\pi}{۳})}=-۱$$

سخت

۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴ از قانون همنهشتی به پیمانه ۱۱، استفاده می‌کنیم.

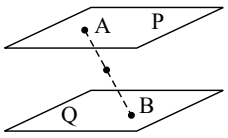
$$۸^{۶۷}=(۲^۳)^{۶۷}=۲^{۲۰۱}$$
$$۲^۵=۳۲\overset{۱۱}{\equiv}-۱\Rightarrow(۲^۵)^{۴۰}\overset{۱۱}{\equiv}(-۱)^{۴۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱$$
$$۲^{۲۰۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱\xrightarrow{\times ۲}۲^{۲۰۱}\overset{۱۱}{\equiv}۲$$

روش دوم: قضیهٔ فرما:

$$a^{p-۱}\overset{p}{\equiv}۱\quad (a,p)=۱$$
$$۸^{۶۷}=۲^{۲۰۱}\quad ,\quad ۲^{۱۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱\xrightarrow{\text{توان }۲۰}۲^{۲۰۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱\xrightarrow{\times ۲}۲^{۲۰۱}\overset{۱۱}{\equiv}۲$$

متوسط

۱۷ ۱ ۲ ۳ ۴ تبدیل دو نقطه دلخواه A و B از خط Δ را نقاط A' و B' می‌نامیم.



$$A(۱,۵)\Rightarrow A'(۶,-۱)$$
$$B(۲,۳)\Rightarrow B'(۵,۱)$$

معادله خط $A'B'$ را می‌نویسیم $y+۱=\frac{۲}{-۱}(x-۶)\Rightarrow y+۲x=۱۱$

خط Δ' با دوران π حول مبداء به صورت $y+۲x+۱۱=۰$ تبدیل می‌شود.

سخت

۱۸ ۱ ۲ ۳ ۴

عبارت $D_x^۲(y)$ همان مشتق دوم تابع $f(x)$ است.

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

$$f(x)=|x^۲-۴|=\begin{cases}x^۲-۴ & x\geq ۲ \text{ یا } x\leq -۲\\ -x^۲+۴ & -۲<x<۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲x & x>۲ \text{ یا } x<-۲\\ -۲x & -۲<x<۲\end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases}۲ & x>۲ \text{ یا } x<-۲\\ -۲ & -۲<x<۲\end{cases} \Rightarrow f''(x)=\frac{۲|x^۲-۴|}{x^۲-۴}$$

سخت

۱۹ ۱ ۲ ۳ ۴ نکته: شرط وجود جواب در مساله سیاله $ax+by=c$ آن است که $(a,b)|c$

$$(۵,۱۰)|a^۲+۱ \Rightarrow ۵|a^۲+۱ \Rightarrow a^۲\overset{۵}{\equiv}-۱\overset{۵}{\equiv}۴$$

$$a^۲\overset{۵}{\equiv}۴$$

می‌دانیم برای هر عدد صحیح مانند a در تقسیم بر ۵ باقی‌مانده یکی از اعداد ۰ تا ۴ می‌باشد.

$$\left.\begin{matrix}a\overset{۵}{\equiv}۰,۱,۲,۳,۴\\ a^۲\overset{۵}{\equiv}۰,۱,۴,۴,۱\end{matrix}\right\}\Rightarrow a=۵k+۲ \quad \text{یا} \quad a=۵k+۳$$

$$\left.\begin{matrix}۱)\ ۹<a=۵k+۲\leq ۹۹\xrightarrow{-۲}۷<۵k\leq ۹۷\Rightarrow \text{تعداد}=\left[\frac{۹۷}{۵}\right]-\left[\frac{۷}{۵}\right]=۱۹-۱=۱۸\\ ۲)\ ۹<a=۵k+۳\leq ۹۹\xrightarrow{-۳}۶<۵k\leq ۹۶\Rightarrow \text{تعداد}=\left[\frac{۹۶}{۵}\right]-\left[\frac{۶}{۵}\right]=۱۹-۱=۱۸\end{matrix}\right\}\xrightarrow{+}a \text{ تعدادکل}=۳۶$$

متوسط

۲۰ ۱ ۲ ۳ ۴ شعاع دایره $R=۲$ و $(۲,۱)$ مرکز دایره

$$x=۲+R\cos\alpha=۲+۲\cos ۱۵۰^\circ=۲+۲\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=۲-\sqrt{۳}$$

$$y=۱+R\sin\alpha=۱+۲\sin ۱۵۰^\circ=۱+۲\left(\frac{۱}{۲}\right)=۲$$

مختصات جدید $(۲-\sqrt{۳},۲)$ است.

متوسط

۲۱ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا مقادیر دنباله را بصورت $a_۱,a_۲,a_۳,\cdots,a_{۲n}$ فرض می‌کنیم بنابراین جمع تمام جملات برابر است با:

$$S_{۲n}=\frac{a_۱(۱-q^{۲n})}{۱-q}$$

وقتی بخواهیم فقط جمع ردیف‌های فرد را حساب کنیم باید بدانیم که تعداد جملات نصف می‌شود و چون یک در میان باید انتخاب کنیم قدر نسبت مربع می‌شود.

$$\text{جمع جملات مرتبه فرد}=\frac{a_۱(۱-(q^۲)^n)}{۱-q^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{a_۱(۱-q^{۲n})}{۱-q}=\frac{۳a_۱(۱-q^{۲n})}{(۱-q)\cdot(۱+q)}\Rightarrow \frac{۳}{۱+q}=۱\Rightarrow q=۲ \quad \text{(جمع جملات مرتبه فرد) ۳ = جمع کل جملات}$$

سخت

۲۲ ۱ ۲ ۳ ۴ تذکر: اگر $n=۲^\alpha\times ۳^\beta\times ۵^\gamma\times\cdots$ آنگاه T تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی n از دستور $(\alpha+۱)(\beta+۱)(\gamma+۱)\cdots$ حاصل می‌شود.

$$\left.\begin{matrix}T(n)=۱۲=۶\times ۲=۴\times ۳=۳\times ۲\times ۲\\ T(۲\times n)=۱۵=۵\times ۳\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{توان ۲ در } n \text{ برابر } ۳ \text{ می‌باشد.}}۲^۳\times p^۲$$

$$\left.\begin{matrix}T(n)=۱۲=۶\times ۲=۴\times ۳=۳\times ۲\times ۲\\ T(۳n)=۱۶=۸\times ۲=۴\times ۴\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{توان ۳ در } n \text{ برابر } ۲ \text{ می‌باشد.}}۳^۲\times p'^۳$$

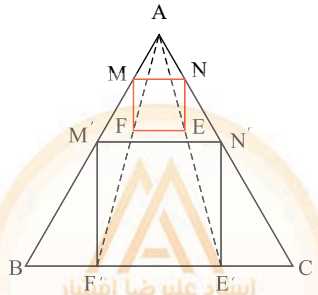
$$\Rightarrow n=۲^۳\times ۳^۲$$

$$T(۳۰,n)=T(۳۰\times ۲^۳\times ۳^۲)=T(۲^۴\times ۳^۳\times ۵)=۵\times ۴\times ۲=۴۰$$

سخت

۲۳ ۱ ۲ ۳ ۴ پاره خط MN را موازی BC رسم می‌کنیم روی MN مربع $MNEF$ را بنا می‌کنیم. از A به نقاط E و F وصل کرده امتداد می‌دهیم تا BC را در E' و F' قطع کنند.

در نقاط E' و F' عمودهایی بر BC خارج می‌کنیم تا AC و AB را در N' و M' قطع کنند. در این صورت $M'N'E'F'$ مجانس مربع $MNEF$ بمرکز A خواهد بود پس $M'N'E'F'$ مربع مورد نظر است.



استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

سخت

۲۴ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم در هر دنباله عددی $S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$

$$\begin{matrix} a_۱ = ۱ + ۲p \\ a_۲ = p - ۱ \end{matrix} \Rightarrow d = a_۲ - a_۱ = (p-۱) - (۱ + ۲p) = -p - ۲$$

$$S_۸ = \frac{۸}{۲}[۲a_۱ + (۸-۱)(-p-۲)] \Rightarrow ۱۲۰ = ۸(۴p + ۲ - ۷p - ۱۴)$$

$$\Rightarrow ۱۵ = -۳p - ۱۲ \Rightarrow p = -۹ \Rightarrow d = -p - ۲ = ۷$$

متوسط

۲۵ ۱ ۲ **۳** ۴ نکته: اگر a, b در عدد طبیعی و $(a,b) = d$ داریم:

$$(a,b) = d \xrightarrow{\div d} (\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = ۱ \begin{cases} \frac{a}{d} = a' \Rightarrow a = a'd \\ \frac{b}{d} = b' \to b = b'd \end{cases}, (a', b') = ۱$$

$$(a,b) \times [a,b] = ab \Rightarrow [a,b] = a'b'd$$

$$m = d + ۸ \to a'b'd = d + ۸ \Rightarrow (a'b' - ۱) \times d = ۸$$

واضح است که d مقسوم‌علیه ۸ می‌باشد.

$$d = ۱ \to a'b' - ۱ = ۸ \to a'b' = ۹ \Rightarrow a' = ۹, b' = ۱ \to a = ۹, b = ۱ \to a + b = ۱۰$$

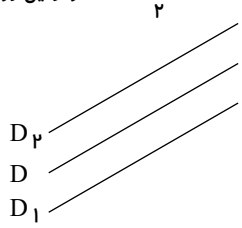
$$d = ۲ \to a'b' - ۱ = ۴ \to a'b' = ۵ \to a' = ۵, b' = ۱ \to a = ۱۰, b = ۲ \to a + b = ۱۲$$

$$d = ۴ \to a'b' - ۱ = ۲ \to a'b' = ۳ \Rightarrow a' = ۳, b' = ۱ \Rightarrow a = ۱۲, b = ۴ \Rightarrow a + b = ۱۶$$

$$d = ۸ \to a'b' - ۱ = ۱ \to a'b' = ۲ \Rightarrow a' = ۲, b' = ۱ \to a = ۱۶, b = ۸ \Rightarrow a + b = ۲۴$$

سخت

۲۶ ۱ **۲** ۳ ۴ چون دو خط $D_۱$ و $D_۲$ موازی هستند، پس محور بازتاب (خط D) هم با آن‌ها موازی است و $a = -۲$ خواهد بود. چون D بین $D_۱$ و $D_۲$ قرار می‌گیرد، پس $b = \frac{۱۳ - ۳}{۲} = ۵$ و از این رو $D : ۳y - ۲x + ۵ = ۰$ از ضابطه‌ی $T(x,y) = (x-۱, y)$ و با فرض $(X,Y) = (x-۱, y)$ خواهیم داشت:



$$\begin{cases} x = X + ۱ \xrightarrow{\text{جایگذاری در } D} \\ y = Y \end{cases}$$

$$۳Y - ۲(X+۱) + ۵ = ۰$$

$$\Rightarrow ۳Y - ۲X + ۳ = ۰ \xrightarrow{X=۰} Y = -۱$$

سخت

۲۷ ۱ ۲ **۳** ۴

$$f'(x) = \frac{۲}{\sqrt{۱ - (۲x-۱)^۲}} - ۲(\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{\sqrt{۱-x}})\frac{۲}{\sqrt{۴x - ۴x^۲}} - \frac{۱}{\sqrt{x - x^۲}} = ۰ \Rightarrow f(x) = cte$$ تابع ثابت

چون مشتق تابع در حالت کلی صفر است پس این یک تابع ثابت است یعنی به ازای جمیع مقادیر x ثابت است بنابراین یک عدد دلخواه مانند $x = ۱$ در تابع قرار می‌دهیم تا تابع $f(x)$ پیدا شود.

$$f(x) = f(۱) = -\frac{\pi}{۲} \to f'(x) - f(x) = ۰ - (-\frac{\pi}{۲}) = \frac{\pi}{۲}$$

سخت

۲۸ ۱ **۲** ۳ ۴ فرض کنید عدد چهار رقمی مورد نظر را به صورت $\overline{abcd}$ نمایش دهیم. با توجه به صورت سؤال، $d \geq ۴$ است. همچنین لزوماً $a \geq ۱$ می‌باشد. با فرض $a = a' + ۱$ و $d = d' + ۴$، داریم:

$$a + b + c + d \leq ۹ \Rightarrow a' + b + c + d' \leq ۴$$

با افزودن یک متغیر جدید مانند e به این نامعادله خواهیم داشت:

$$a' + b + c + d' + e = ۴$$

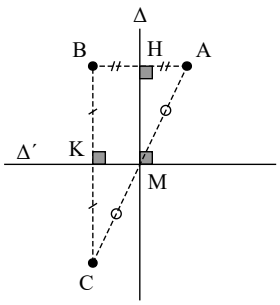
$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{۸}{۴} = ۷۰$$

سخت

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

۲۹ ۱ ۲ ۳ ۴

شیب دو خط قرینه و معکوس هم هستند، پس دو خط برهم عمودند. مسأله، ترکیب دو بازتاب با محورهای عمود بر هم را مطرح می‌نماید که حاصل آن بازتاب مرکزی نسبت به محل برخورد دو خط می‌باشد. داریم:



محل برخورد دو خط (M) از حل دستگاه روبه‌رو بدست می‌آید:

$$M:\begin{cases} y=۳x \\ x=-۳y+۱۰ \end{cases} \Rightarrow M\begin{cases} x=۱ \\ y=۳ \end{cases}$$

M وسط AC' می‌باشد. داریم:

$$M\begin{cases} x_M=۱=\dfrac{x_A+x_C}{۲} \\ y_M=۳=\dfrac{y_A+y_C}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱=\dfrac{۱+x_C}{۲} \\ ۳=\dfrac{۲+y_C}{۲} \end{cases} \Rightarrow C\begin{vmatrix} ۱ \\ ۴ \end{vmatrix}$$

متوسط

۳۰ ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به تابع ضمنی $F(x,y)=y^۳+۳xy^۲-۳x^۳y-۱=۰$. مقدار y' در نقطه‌ی $(۱,۱)$برابر است با:

$$y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۳y^۲-۹x^۲y}{۳y^۲+۶xy-۳x^۲}\overset{(۱,۱)}{=\!=}-\frac{۳-۹}{۳+۶-۳}=۱=m_{\text{مماس}}\Rightarrow y-۱=۱(x-۱)\Rightarrow y=x$$

در نتیجه خط مماس در نقطه‌ی $(۱,۱)$، خط $y=x$ است که از نواحی اول و سوم می گذرد.

متوسط

۳۱ ۱ ۲ ۳ ۴

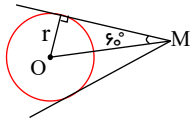
می‌دانیم $\log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$ ، $\log_b^a = \dfrac{۱}{\log_a^b}$ و $\log_b^a \times \log_a^b = ۱$

$$\frac{۲\log ۲+\log ۵}{\log ۲+\frac{۱}{۲}\log ۵}\Rightarrow\frac{\log ۲۰}{\log ۲\sqrt{۵}}=\log_{۱۰}^{۲۰}\times\log^{۱۰}_{\sqrt{۲۰}}=\log_{۱۰}^{۲۰}\times۲\times\log_{۲۰}^{۱۰}=۲$$

متوسط

۳۲ ۱ ۲ ۳ ۴

زاویه رؤیت یک دایره از یک نقطه در حقیقت همان زاویه بین مماس‌های رسم شده از آن نقطه بر دایره است.



$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۱۶+۱۶}=\sqrt{۱۲}, O:(-۲,۲)$$

$$\sin ۶۰=\frac{r}{OM}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۳}}{OM}\Rightarrow OM=۴$$

مکان مطلوب دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۴ می‌باشد.

$$\Rightarrow (x+۲)^۲+(y-۲)^۲=۱۶$$

سخت

۳۳ ۱ ۲ ۳ ۴

سهمی قائم است پس طول رأس و کانون با هم برابرند پس $S(-۱,\frac{۱}{۲})$ و چون O (مبدأ) و B روی محور x ها و در امتداد F قرار دارند و هر دو روی سهمی هستند پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که O و B دو سر وتر کانون سهمی هستند.

$$\left.\begin{matrix} S=(-۱,\frac{۱}{۲}) \\ F=(-۱,۰) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{P=-\frac{۱}{۲}} |OB|=\left|۴\times-\frac{۱}{۲}\right|=۲$$

نقطه B به اندازه ۲ واحد از O عقب تر است پس مختصات آن $(-۲,۰)$ است.

تذکر: می توانیم معادله سهمی را نوشته و نهایتاً محل برخورد سهمی را با محور x بدست آوریم.

متوسط

۳۴ ۱ ۲ ۳ ۴

با دو خط مجانب تشکیل دستگاه داده و مختصات مرکز را بدست می آوریم.

$$\begin{cases} ۲y=-x+۱ \\ ۲y=x-۱ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=۰ \\ x=۱ \end{cases}\Rightarrow O=(۱,۰)\Rightarrow OF=C=\sqrt{۵}$$

چون طول کانون و مرکز با هم برابر است پس هذلولی قائم است.

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

شیب مجانب $m = \pm\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{a}{b}$

$۲a = b \Rightarrow c^۲ = a^۲ + b^۲ \Rightarrow ۵ = a^۲ + ۴a^۲ \Rightarrow a^۲ = ۱ \Rightarrow a = ۱, b = ۲$

طول وتر کانونی $= MN = \frac{۲b^۲}{a} = \frac{۸}{۱} = ۸$

متوسط

۳۵ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\begin{cases} x = ۱ + ۶\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{x-۱}{۶} \\ y = ۱ + ۴\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{y-۱}{۴} \end{cases} \xrightarrow{\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱} \frac{(x-۱)^۲}{۳۶} + \frac{(y-۱)^۲}{۱۶} = ۱$$

$a^۲ = ۳۶ \ , \ b^۲ = ۱۶ \Rightarrow e = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}} = \sqrt{۱ - \frac{۱۶}{۳۶}} = \sqrt{\frac{۲۰}{۳۶}} = \sqrt{\frac{۵}{۹}} = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$

متوسط

۳۶ **۱** ۲ ۳ ۴ توجه: اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه در این بازه هم ماکسیمم مطلق (سراسری) دارد و هم مینیمم مطلق سراسری.

تابع f دربازه‌ی داده شده پیوسته است بنابراین هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق

متوسط

۳۷ ۱ ۲ **۳** ۴ باتوجه به دامنه‌ی f ، برد آن را تعیین می‌کنیم وبرد f را به دامنه‌ی g (بازه‌ی بررسی g) نسبت می‌دهیم و برد gof رابه دست می‌آوریم :

$D_f : [۰, ۱]$

$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} + \frac{۱}{۲\sqrt{۱-x}} > ۰ \xrightarrow{\text{صعودی}} R_f = [f(۰), f(۱)] = [-۱, ۱]$

$g(x) = x - x^۲, x \in [-۱, ۱] \qquad g'(x) = ۱ - ۲x = ۰ \xrightarrow{-۱<x<۱} x = \frac{۱}{۲}$ بحرانی

$$\begin{cases} g(-۱) = -۲ \\ g(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow R_{gof} = [-۲, \frac{۱}{۴}] \\ g(۱) = ۰ \end{cases}$$

سخت

۳۸ **۱** ۲ ۳ ۴ تابع را در اطراف مجانب قائم آن رسم می‌کنیم، با این شرط که ماکسیمم نسبی تابع قبل از مجانب قائم باشد. دقت نمایید که تابع باید در همسایگی چپ نقطه‌ی $x = ۱$، مقدار $(-\infty)$ باشد تا ماکسیمم نسبی قبل از مجانب قائم قرار گیرد. لذا داریم:

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = -\infty \Rightarrow (۱)^۲ - ۳(۱) + a > ۰ \Rightarrow a > ۲$

شرط اکسترمم داشتن و f' ریشه ساده داشته باشد را هم بررسی می‌کنیم:

$f'(x) = \frac{(۲x-۳)(x-۱) - (x^۲ - ۳x + a)}{(x-۱)^۲} = ۰$

$\Rightarrow x^۲ - ۲x + ۳ - a = ۰ \ , \ \Delta > ۰ \Rightarrow ۱ - (۳ - a) > ۰ \Rightarrow a > ۲$

متوسط

۳۹ ۱ ۲ ۳ **۴** چون اتحاد مزدوج در مورد ماتریس های A و A^t برقرار است پس این دو ماتریس تعویض پذیرند.

$\left|A^۲ - ۲AA^t + (A^t)^۲\right| = \left|(A - A^t)^۲\right| = \left|A - A^t\right|^۲$

از طرفی $A - A^t$ ماتریس پادمتقارن از مرتبه ۳ است پس دترمینان آن صفر است. بنابراین :

$? = ۰^۲ = ۰$

سخت

۴۰ ۱ ۲ **۳** ۴ $\left|A^t\right| = |A|$ است، پس:

$$\begin{vmatrix} -x & y & ۰ \\ -۱ & -y & x \\ x & -y & y \end{vmatrix} = k$$

ستون اول را با ستون دوم جمع می‌کنیم جای ستون اول می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} y-x & y & ۰ \\ -y-۱ & -y & x \\ x-y & -y & y \end{vmatrix} = k$$

از ستون دوم y فاکتور می‌گیریم و ستون سوم را در ۲ ضرب کرده و $\frac{۱}{۲}$ پشت دترمینان قرار می‌دهیم:

$$\frac{۱}{۲}y \begin{vmatrix} y-x & ۱ & ۰ \\ -y-۱ & -۱ & ۲x \\ x-y & -۱ & ۲y \end{vmatrix} = k \Rightarrow \begin{vmatrix} y-x & ۱ & ۰ \\ -y & -۱ & ۲x \\ x-y & -۱ & ۲y \end{vmatrix} = \frac{۲k}{y}$$

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

روش دوم: روش عددگذاری

$x=۲, y=-۱$

$$\begin{vmatrix} -۲ & -۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & -۱ \end{vmatrix} = k \Rightarrow (۲+۰-۴)-(۰-۱-۴)=k \Rightarrow k=۳$$

$$?=\begin{vmatrix} -۳ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۴ \\ ۳ & -۱ & -۲ \end{vmatrix} = (-۶+۱۲+۰)-(۰+۰+۱۲)=-۶$$

گزینه‌ها:

۱) -۱۲ ۲) ۱۲ ۳) -۶ ۴) ۶

گزینه‌های (۱) و (۲) و (۴) رد می‌شوند.

سخت

۴۱ ۱ ۲ ۳ **۴** با برابر قرار دادن ضابطه‌های دو تابع f و g به معادله‌ی تلاقی دست پیدا می‌کنیم و به حل معادله‌ی حاصل می‌پردازیم:

$$\left.\begin{matrix} f(x)=-x^۴+۲x^۲+x \\ g(x)=x+۱ \end{matrix}\right\} \overset{f=g}{\rightarrow} -x^۴+۲x^۲+x=x+۱ \Rightarrow x^۴-۲x^۲+۱=۰ \Rightarrow (x^۲-۱)^۲=۰ \rightarrow (x+۱)^۲\cdot(x-۱)^۲=۰$$

دو نمودار در نقاط $x=۱$, $x=-۱$ بر هم مماسند بنابراین غیر قاطع محسوب می‌شوند.

سخت

۴۲ **۱** ۲ ۳ ۴ در لگاریتم‌ها داریم: $\log_a^x+\log_a^y=\log_a^{x\cdot y}$

$$\log(۲x-۱)+\frac{۱}{۲}\log x^۲=\log ۳ \Rightarrow \log(۲x-۱)+\log|x|=\log ۳ \rightarrow \log(۲x-۱)|x|=\log ۳$$

$$\Rightarrow (۲x-۱)|x|=۳$$

دامنه‌ی لگاریتم باید $|x|(۲x-۱)$ بزرگتر از صفر باشد، $|x|$ که همیشه مثبت می‌باشد حال $(۲x-۱)$ مورد بحث است که باید $۲x-۱>۰$ باشد پس $x>\frac{۱}{۲}$ است؛ که در این صورت

$|x|=x$ می‌باشد لذا داریم:

$$(۲x-۱)(x)=۳ \Rightarrow ۲x^۲-x-۳=۰ \Rightarrow (x+۱)(۲x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ & \text{غ ق ق (چون در دامنه لگاریتم قرار ندارد)} \\ x=\frac{۳}{۲} & \text{ق} \end{cases}$$

بنابراین برای یافتن لگاریتم $\frac{x}{۳}$ در مبنای ۴ داریم:

$$x=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{x}{۳}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \log_۴ \frac{۱}{۲}=\log_{۲^۲} ۲^{-۱}=-\frac{۱}{۲}\log_۲ ۲=-\frac{۱}{۲}$$

متوسط

۴۳ ۱ **۲** ۳ ۴

در هر دنبالهٔ حسابی (عددی) داریم: ← دنبالهٔ عددی : $S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]$

$$S_۵=۲a_۹ \Rightarrow \frac{۵}{۲}[۲a_۱+۴d]=۲(a_۱+۸d) \Rightarrow ۵a_۱+۱۰d=۲a_۱+۱۶d \Rightarrow a_۱=۲d$$

$$a_۱, a_۳, a_k \text{ دنباله هندسی} \Rightarrow q=\frac{a_۳}{a_۱}=\frac{a_۱+۲d}{a_۱}=\frac{۴d}{۲d}=۲$$

$$a_k=a_۱+(k-۱)d=a_۱q^۲ \Rightarrow ۲d+(k-۱)d=(۲d)(۲)^۲ \Rightarrow k=۷$$

سخت

۴۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$A=۱+۱-۱-\frac{۱}{۳}+۱+\frac{۱}{۹}-۱-\frac{۱}{۲۷}+\cdots$$

$$A=\underbrace{(۱-۱+۱-۱+\cdots)}_{B}+\underbrace{(۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۲۷}+\cdots)}_{C}$$

حاصل B یا ۱ است یا صفر. برای محاسبه‌ی حاصل C داریم:

$$C=\frac{a_۱}{۱-q}=\frac{۱}{۱-(\frac{-۱}{۳})}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow \begin{cases} A=۱+\frac{۳}{۴}=\frac{۷}{۴} \\ \text{یا} \\ A=۰+\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۴} \end{cases}$$

بنابراین A یا $\frac{۳}{۴}$ است یا $\frac{۷}{۴}$. بنابراین A مقدار مشخصی ندارد.

متوسط

۴۵ **۱** ۲ ۳ ۴ تابع مشتق‌پذیر است در نقطه ماکسیمم نسبی مقدار مشتق صفر است.

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

$$y' = \frac{۳x^۲ + ۱۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۳ + ۶x^۲)^۲}} = ۰ \Rightarrow x = ۰ \ , \ x = -۴$$

$$f(-۴) = \sqrt[۳]{(-۴)^۳ + ۶(-۴)^۲} = \sqrt[۳]{۱۶ \times ۲} = ۲\sqrt[۳]{۴}$$

متوسط

۴۶ ۱ ۲ ۳ **۴** معادله هذلولی را به صورت استاندارد می نویسیم در هذلولی افقی در شکل استاندارد آن باید ضریب $x^۲$ و ضریب $y^۲$ منفی باشد داریم:

$$۲(x+۱)^۲ - (y - \frac{m}{۲})^۲ = ۱ - m - \frac{m^۲}{۴} + ۲ \Rightarrow ۳ - m - \frac{m^۲}{۴} > ۰$$

$$m^۲ + ۴m - ۱۲ < ۰ \Rightarrow (m+۶)(m-۲) < ۰$$

در نتیجه $-۶ < m < ۲$

متوسط

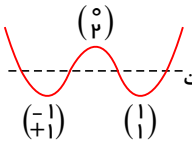
۴۷ ۱ ۲ **۳** ۴ ابتدا، شکل تقریبی نمودار $f(x) = x^۴ - ۲x^۲ + ۲$ را ترسیم می‌کنیم.

$$f'(x) = ۴x^۳ - ۴x = ۰ \rightarrow ۴x(x^۲ - ۱) = ۰ \rightarrow \begin{matrix} x = ۰ \\ x = \pm ۱ \end{matrix}$$

x		-۱		۰		$+۱$	
$۴x$	$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$x^۲ - ۱$	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$
f'	$-$		$+$		$-$		$+$
f	$\searrow$	۱ Min	$\nearrow$	۲ Max	$\searrow$	۱ Min	$\nearrow$

تابع f، دو نقطه مینیمم نسبی و یک نقطه ماکسیمم نسبی دارد و باتوجه به اینکه وقتی $y \to +\infty, \ x \to \pm\infty$

پس شکل تابع بصورت



شرط اینکه خط $y = k$ نمودار $f(x)$ را در ۴ نقطه قطع کند آنست که $f(\pm ۱) < k < f(۰)$

پس $۱ < k < ۲$

سخت

۴۸ ۱ ۲ **۳** ۴

$$x^۲ + ۶xy + y^۲ = ۸$$

$$\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{۶}{۱-۱} = \text{تعریف نشده} \rightarrow ۲\theta = ۹۰ \rightarrow \theta = ۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x' \cos\theta - y \sin\theta \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta \end{cases} \xrightarrow{\theta = ۴۵^\circ} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x' + y') \end{cases}$$

حال مقادیر x و y این دستگاه را بجای x و y در معادله قرار می‌دهیم:

$$\left(\sqrt{\frac{۲}{۲}}(x' - y')\right)^۲ + ۶ \times \frac{۱}{۲}\left(x'^۲ - y'^۲\right) + \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x' + y')\right)^۲ = ۸$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۶}{۲} + \frac{۱}{۲}\right)}_{۴} x'^۲ + \underbrace{\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۶}{۲} + \frac{۱}{۲}\right)}_{-۲} y'^۲ = ۸ \rightarrow ۴x'^۲ - ۲y'^۲ = ۸ \xrightarrow{\div ۸} \frac{x'^۲}{۲} - \frac{y'^۲}{۴} = ۱$$

$$\Rightarrow c^۲ = a^۲ + b^۲ = ۲ + ۴ = ۶ \Rightarrow ۲c = ۲\sqrt{۶}$$

سخت

۴۹ ۱ ۲ **۳** ۴ نکته: شیب مجانب‌های هذلولی قرینه هم می‌باشند.

نکته: اگر معادلات $d : ax + by = c$ و $d' : a'x + b'y = c'$ مجانب‌های یک هذلولی باشند، معادله هذلولی از دستور $(ax + by - c)(a'x + b'y - c') = k$ به‌دست می‌آید.

مجانب‌ها: $\begin{cases} d : ۲x + y = ۰ \\ d' : ۲x + ay = ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{شیب مجانب‌ها قرینه‌اند}} a = -۱$

پس معادله هذلولی عبارت است از:

$$(۲x + y)(۲x - y) = k \Rightarrow ۴x^۲ - y^۲ = k$$

$$M\left|\begin{matrix} \sqrt{۵} \\ ۲ \end{matrix}\right. \in \text{هذلولی} \xrightarrow{\text{در معادله‌ی هذلولی صدق دهید}} ۴(۵) - ۴ = k \Rightarrow k = ۱۶$$

$$\Rightarrow \text{معادله‌ی هذلولی} : ۴x^۲ - y^۲ = ۱۶ \xrightarrow{\div ۱۶} \frac{x^۲}{۴} - \frac{y^۲}{۱۶} = ۱$$

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ = ۴ + ۱۶ = ۲۰ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow \text{فاصله‌ی کانونی} = ۲c = ۴\sqrt{۵}$$

@Alirezaafsharofficial

متوسط

۵۰ ۱ ۲ **۳** ۴ برای این که در $x = ۰$، مشتق سوم f موجود باشد، باید $f^{(۳)}_-(۰) = f^{(۳)}_+(۰)$ و از طرفی توابع f، f' و f'' در $x = ۰$ پیوسته باشند. داریم:

$$f(x)=\begin{cases}۲x-\tan ۲x & ; \quad x>۰\\ ax^n & ; \quad x\le ۰\end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲-۲(۱+\tan^۲ ۲x) & ; \quad x>۰\\ anx^{n-۱} & ; \quad x\le ۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}-۸\tan ۲x(۱+\tan^۲ ۲x) & ; \quad x>۰\\ an(n-۱)x^{n-۲} & ; \quad x\le ۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{(۳)}(x)=\begin{cases}-۱۶(۱+\tan^۲ ۲x)^۲-۳۲\tan^۲ ۲x(۱+\tan^۲ ۲x) & ; \quad x>۰\\ an(n-۱)(n-۲)x^{n-۳} & ; \quad x\le ۰\end{cases}$$

$$f^{(۳)}_{+}(۰)=-۱۶(۱)$$

برای اینکه $f^{(۳)}_{-}(۰)$ مخالف صفر باشد باید توان x یعنی $n-۳$ برابر صفر باشد.

$$n-۳=۰\Rightarrow n=۳\Rightarrow f^{(۳)}_{-}(۰)=a\times ۳\times ۲\times ۱=۶a \quad (۲)$$

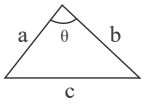
$$(۱),(۲)\Rightarrow ۶a=-۱۶\Rightarrow a=\frac{-۸}{۳}$$

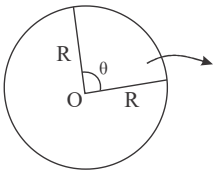
دقت کنید که به ازای $n=۳$ شرط پیوستگی f، f' و f'' در $x=۰$ برقرار می‌شود.

سخت

۵۱ — ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم: $\boxed{S_{\text{مساحت}}=\frac{۱}{۲}a\cdot b\cdot \sin\theta}$ و $\boxed{c^۲=a^۲+b^۲-۲a\cdot b\cos\theta}$





مساحت قطاع $S=\pi R^۲\cdot(\frac{\theta}{۲\pi})$

$$L^۲=۱^۲+۱^۲-۲(۱)\cdot(۱)\cdot\cos\alpha\Rightarrow\alpha=\cos^{-۱}(\frac{۲-L^۲}{۲})$$

باتوجه به شکل مساحت سطح هاشورخورده برابر است با:

$$S=\text{مساحت قطاع}-\text{مساحت مثلث}=\pi r^۲(\frac{\alpha}{۲\pi})-\frac{۱}{۲}(۱)\cdot(۱)\cdot\sin\alpha$$

$$S=\frac{\alpha}{۲}-\frac{\sin\alpha}{۲}$$

از طرفین فرمول مساحت، نسبت به L مشتق می‌گیریم.

$$S'_L=\frac{۱}{۲}\alpha'_L-\frac{۱}{۲}\alpha'_L\cdot\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\alpha'_L\cdot(۱-\cos\alpha)$$

$$=\frac{۱}{۲}(\frac{L^۲}{۲})\frac{۲L}{\sqrt{۴-(۲-L^۲)^۲}}=\frac{L^۳}{۲\sqrt{۴L^۲-L^۴}}=\frac{L^۲}{۲\sqrt{۴-L^۲}}$$

سخت

۵۲ — **۱** ۲ ۳ ۴

چون نقطه روی منحنی قرار دارد برای محاسبهٔ معادلهٔ خط مماس از $y-y_۰=(x-x_۰)$ استفاده می‌کنیم وبرای محاسبهٔ شیب خط مماس بر تابع معکوس هم از فرمول $(f^{-۱})'_{(b)}=\frac{۱}{f'(a)}$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=x+e^{۲x}\to f'(x)=۱+۲e^{۲x}$$

$$f^{-۱}(۱)=a\to f(a)=۱\to a+e^{۲a}=۱\to a=۰\xrightarrow{(۰,۱)\in f}(۱,۰)\in f^{-۱}$$

بزای نوشتن معادله ی خط مماس بر تابع $y=f^{-۱}(x)$، باید شیب خط مماس را بیابیم

مماس واقع بر تابع معکوس $m=(f^{-۱})'(۱)=\frac{۱}{f'(۰)}=\frac{۱}{۳}$

اساتید علیرضا افشار
"مشاوره"

$$y - y_{\circ} = m(x - x_{\circ}) \to y - \circ = \frac{۱}{۳}(x - ۱) \to ۳y = x - ۱ \to ۳y - x = -۱$$

متوسط

۵۳ ۱ ۲ ۳ **۴** ابتدا چند جمله‌ی این دنباله را می‌نویسیم.

$$a_n = ۳^{-n} \cdot \cos^n(\frac{n \cdot \pi}{۲}) = \frac{۱}{۳^n} \cdot \cos^n(\frac{n \cdot \pi}{۲}) = \left(\frac{\cos \frac{n \cdot \pi}{۲}}{۳}\right)^n$$

$$\{a_n\} = \circ, (-\frac{۱}{۳})^۲, \circ, (\frac{۱}{۳})^۴, \circ, (-\frac{۱}{۳})^۶, \circ, \cdots$$

$$a_۱ + a_۲ + a_۳ + \cdots = \circ + (-\frac{۱}{۳})^۲ + \circ + (\frac{۱}{۳})^۴ + \cdots = \frac{۱}{۳^۲} + \frac{۱}{۳^۴} + \cdots$$

این یک دنبالهٔ هندسی نزولی نامحدود است که مجموع جملات به این صورت محاسبه می‌شود:

$$S_n = \frac{a_۱}{۱ - q} = \frac{\frac{۱}{۹}}{۱ - \frac{۱}{۹}} = \frac{۱}{۸}$$

سخت

۵۴ **۱** ۲ ۳ ۴ می‌دانیم:

$$y = (ax + b)^n \to y^{(n)} = a^n \times n!$$

نکته: در تابع $y = f(x) \cdot g(x)$ اگر $f(a) = \circ$ باشد آنگاه:

$$y'(a) = f'(a) \cdot g(a)$$

یعنی فقط از عامل صفر شونده مشتق می‌گیریم و در بقیه عددگذاری می‌کنیم.

$$y = (۳x - ۱)^۳ \cdot \sqrt[۳]{۶x - ۱} \to y^{(۳)}_{(x)} = ۳^۳ \times ۳! \times \sqrt[۳]{۶(\frac{۱}{۳}) - ۱} = ۱۶۲$$

متوسط

۵۵ ۱ ۲ **۳** ۴ می‌دانیم: مجموع جملات در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $\alpha_۱$ و قدر نسبت q به این قرار است.

$$S_n = \frac{a_۱(۱ - q^n)}{۱ - q}$$

صورت کسر، دنبالهٔ هندسی قدر نسبت x می‌باشد.

$$\frac{۱ + x + \ldots + x^۷}{۱ + x^۲} = \frac{\frac{۱(۱ - x^۸)}{۱ - x}}{۱ + x^۲} = \frac{۱ - x^۸}{(۱ - x)(۱ + x^۲)} \frac{(۱ - x^۴)(۱ + x^۴)}{(۱ - x)(۱ + x^۲)}$$

$$= \frac{(۱ - x^۲)(۱ + x^۲)(۱ + x^۴)}{(۱ - x)(۱ + x^۲)} = \frac{(۱ - x)(۱ + x)(۱ + x^۴)}{(۱ - x)} \Rightarrow f(x) = (۱ + x)(۱ + x^۴)$$

برای محاسبهٔ مشتق در $x = -۱$، کافی است از عامل صفرشونده مشتق بگیریم.

$$f'(-۱) = ۱(۱ + (-۱)^۴) = ۲$$

متوسط

۵۶ ۱ ۲ ۳ **۴** می‌دانیم: در دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدر نسبت q مجموع جملات $S_n = \frac{a_۱(۱ - q^n)}{۱ - q}$

$$۶۴ + ۲(\frac{۶۴}{۲}) + ۲(\frac{۶۴}{۴}) + \cdots + ۲(\frac{۶۴}{۲^{n-۱}})$$

$$۶۴ + ۲(۶۴)(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲^{n-۱}}) = ۶۴ + ۲(۶۴)(\frac{\frac{۱}{۲}(۱ - \frac{۱}{۲^{n-۱}})}{۱ - \frac{۱}{۲}}) = ۱۹۰$$

$$۱۲۸(۱ - \frac{۱}{۲^{n-۱}}) = ۱۲۶ \to ۱ - \frac{۱}{۲^{n-۱}} = \frac{۶۳}{۶۴} \to \frac{۱}{۶۴} = \frac{۱}{۲^{n-۱}} \to n - ۱ = ۶ \to n = ۷$$

سخت

۵۷ ۱ ۲ **۳** ۴ می‌دانیم: $\log_A^B = \frac{۱}{\log_B^A}$ ، $\log_A^B = \frac{\log_C^A}{\log_C^B}$

روزانه ۵ درصد از حجم باد کم می‌شود پس ۰٫۹۵ باقی می‌ماند و در هر روز حجم باد دوباره در ۰٫۹۵ ضرب می‌شود پس حجم باد باقی‌مانده در روز nام، $k \times (۰٫۹۵)^n$ است (k، حجم باد اولیهٔ قایق است) که به گفتهٔ صورت سوال برابر $\frac{k}{۲}$ می‌شود.

$$k \times (۰٫۹۵)^n = \frac{k}{۲} \Rightarrow (۰٫۹۵)^n = \frac{۱}{۲}$$

چون متغیر در توان قرار دارد از طرفین لگاریتم در پایهٔ $\frac{۱}{۲}$ می‌گیریم.

استاد علیرضا افشار
@Alirezaafsharofficial

$$\log_{\frac{۱}{۲}}^{(۰/۹۵)^n} = \log_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow n \cdot \log_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۹۵}{۱۰۰}} = ۱$$

$$\log_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۹۵}{۱۰۰}} = \frac{۱}{n} \Rightarrow \log_{۲}^{\frac{۱۰۰}{۹۵}} = \frac{۱}{n} \Rightarrow \log_{\frac{۲۰}{۱۹}}^{۲} = n$$

$$\frac{\log ۲}{\log \frac{۲۰}{۱۹}} = n \Rightarrow \frac{\log ۲}{\log ۲ + \log ۱۰ - \log ۱۹} = \frac{۰/۳۰۱}{۰/۳۰۱ + ۱ - ۱/۲۸۷} = \frac{۰/۳۰۱}{۰/۰۱۴} = \frac{۳۰۱}{۱۴} = ۲۱/۵$$

سخت

۵۸ ۱ ۲ **۳** ۴ — $x = ۰$ ریشه ساده درون قدرمطلق است، بنابراین در $x = ۰$ مشتق وجود ندارد. حال $f'(x) = ۰$ را حل می‌کنیم. دقت کنید که قدرمطلق عامل ضربی است و می‌توان آن را نادیده گرفت (زیرا طرف راست معادله صفر است و مثبت و منفی آن فرقی ندارد).

$f(x) = x(x^۲ - ۳) = x^۳ - ۳x \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$ نقاط بحرانی، $= \{-۱, ۰, ۱\}$

متوسط

۵۹ ۱ **۲** ۳ ۴ — برای این که تقعر رو به بالا باشد باید $f''(x) > ۰$ شود:

$f(x) = x^۳ - ۳x^۲ - ۲۴x \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ - ۶x - ۲۴ \Rightarrow f''(x) = ۶x - ۶ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱$

برای این که تابع نزولی شود باید $f'(x) < ۰$ باشد.

$f'(x) = ۳(x^۲ - ۲x - ۸) = ۰ \Rightarrow x = -۲, ۴ \Rightarrow f'(x) \leq ۰ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۴$

برای آن که تابع هر دو شرط را داشته باشد، از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$۱ \leq x \leq ۴ \Rightarrow I = [۱, ۴] \Rightarrow b - a = ۳$

متوسط

۶۰ ۱ ۲ ۳ **۴** — برای محاسبه‌ی مجموع ضرایب مثبت بسط $(ax - by)^n$ به صورت زیر اقدام می‌کنیم: (a و b اعداد حقیقی مثبت‌اند.)

$$\frac{\text{مجموع ضرایب } (ax - by)^n + \text{مجموع ضرایب } (ax + by)^n}{۲} = \frac{(a - b)^n + (a + b)^n}{۲}$$

بنابراین: $\text{مجموع ضرایب مثبت} = \frac{(۷ - ۳)^{۱۰} + (۷ + ۳)^{۱۰}}{۲} = \frac{۴^{۱۰} + ۱۰^{۱۰}}{۲}$

توجه کنیم که برای محاسبه‌ی مجموع ضرایب بسط $(a + b)^n$ کافی است جای متغیرها یک بگذاریم.

متوسط

۶۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

$m_۱ = m_۲ \Rightarrow \rho_۱ V_۱ = \rho_۲ V_۲ \Rightarrow \rho_۱ A_۱ h_۱ = \rho_۲ A_۲ h_۲$

$h_۱ = h_۲ \Rightarrow \rho_۱ A_۱ = \rho_۲ A_۲ \Rightarrow \rho_۱ \pi R_۱^۲ = \rho_۲ (\pi R_۱^۲ - \pi R_۲^۲)$

$\rho_۱ \pi R_۱^۲ = \rho_۲ \pi (R_۱^۲ - (\frac{R_۱}{۲})^۲] \Rightarrow \rho_۱ R_۱^۲ = \frac{۳}{۴} R_۱^۲ \times \rho_۲ \Rightarrow \rho_۱ = \frac{۳}{۴}\rho_۲ \Rightarrow \rho_A = \frac{۳}{۴}\rho_B$

سخت

۶۲ ۱ ۲ **۳** ۴ — وقتی ظرف با شتاب قائم a تندشونده و به طرف پایین حرکت می‌کند، شتاب قائم حاکم بر آن (g') برابر است با: $g' = g - a$

بنابراین داریم:

$$\Delta P = \rho g (\Delta h) \Rightarrow \frac{\Delta P_۱}{\Delta P_۲} = \frac{g}{g'} \Rightarrow \frac{\Delta P_۱}{\Delta P_۲} = \frac{g}{g - \frac{g}{۳}} = \frac{g}{\frac{۲}{۳}g}$$

$$\frac{\Delta P_۱}{\Delta P_۲} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \Delta P_۲ = \frac{۲}{۳}\Delta P_۱$$

متوسط

۶۳ ۱ ۲ **۳** ۴ — اگر W پهنای هر یک از نوارها فرض شود، فاصله‌ی نوارهای روشن از نوار روشن مرکزی مضرب زوجی از W و فاصله نوارهای تاریک از نوار روشن مرکزی مضرب فردی از آن است.

$x = (۲n - ۱)W \Rightarrow ۵W = (۲n - ۱)W \Rightarrow ۲n - ۱ = ۵ \Rightarrow n = ۳$

متوسط

۶۴ ۱ **۲** ۳ ۴ — فاصله‌ی دو نوار تاریک یا روشن متوالی از رابطه $x_۱ = \frac{\lambda D}{a}$ محاسبه می‌گردد.

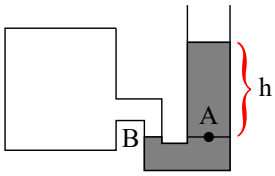
$$x_۱ = \frac{\lambda \times ۳۰۰۰}{۰/۲} \Rightarrow \lambda = \frac{۲}{۳} \times ۱۰^{-۴} cm$$

$$\delta = (۲n)\frac{\lambda}{۲} = n\lambda = ۵ \times \frac{۲}{۳} \times ۱۰^{-۴} = \frac{۱}{۳} \times ۱۰^{-۳} cm \times ۱۰^{۷} = \frac{۱}{۳} \times ۱۰^{۴} A^\circ$$

سخت

۶۵ ۱ ۲ ۳ **۴** — فشارسنج پیمانه‌ای اختلاف فشار گاز درون کپسول را با هوای بیرون نشان می‌دهد. که برابر فشار اختلاف ستون جیوه در دو شاخه است.

مشاوره استاد علیرضا افشار
@Alirezaafsharofficial



$$P_A = P_B$$
$$\rho gh + P_\circ = P_B \Rightarrow ۱۲۰۰۰ \times ۱۰ \times \Delta h + ۱۰^۵ = ۱٫۳ \times ۱۰^۵$$
$$۱٫۳ \times ۱۰^۵ - ۱۰^۵ = ۱۲۰۰۰ \times ۱۰ \times \Delta h \Rightarrow \Delta h = ۰٫۲۵m \Rightarrow \Delta h = ۲۵cm$$

متوسط

۶۶ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\Delta F = \Delta P \cdot A \xrightarrow{P=\rho gh} F = \rho g \Delta h \cdot A \xrightarrow{\Delta V = A\Delta h} F = \rho g \Delta V$$

$$F = ۱۴۰۰۰ \times ۱۰ \times ۵۰ \times ۱۰^{-۶} = ۷N$$

متوسط

۶۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\begin{cases} \text{اختلاف زمان رسیدن نورها از دو شکاف به وسط نوار روشن هشتم} : \Delta t = (۲n)\dfrac{T}{۲} = ۸T \\ \text{فاصله‌ی هشتمین نوار روشن تا نوار مرکزی} : x = \dfrac{n\lambda D}{a} \Rightarrow ۴ \times ۱۰^{-۳} = \dfrac{۸ \times \lambda \times ۱}{۱ \times ۱۰^{-۳}} \Rightarrow \lambda = ۰٫۵ \times ۱۰^{-۶}m \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\Delta t = ۸ \times \frac{\lambda}{V} = ۸ \times \frac{۰٫۵ \times ۱۰^{-۶}}{۳ \times ۱۰^۸} = \frac{۴}{۳} \times ۱۰^{-۱۴}(s)$$

سخت

۶۸ ۱ ۲ **۳** ۴ چگالی یخ ۰٫۹ گرم بر سانتی‌متر مکعب است، یعنی هر سانتی‌متر مکعب یخ ۰٫۹ گرم جرم دارد و چگالی آب ۱ گرم بر سانتی‌متر مکعب است. یعنی هر سانتی متر مکعب آب، ۱ گرم جرم دارد. در نتیجه اگر ۰٫۹ گرم یخ ذوب شود تبدیل به ۰٫۹ گرم آب می‌شود که حجم آن ۰٫۹ سانتی‌متر مکعب است یعنی حجم یخ، ۰٫۱ سانتی‌متر مکعب کاهش می یابد. بنابراین می‌توان نوشت:

ذوب	کاهش حجم
۰٫۹ گرم یخ	۰٫۱ سانتی مترمکعب
x گرم یخ	۵ سانتی متر مکعب

$$\Rightarrow x = \frac{۰٫۹ \times ۵}{۰٫۱} = ۴۵gr$$

در نتیجه اگر ۴۵ گرم یخ ذوب شود حجم آن ۵ سانتی متر مکعب کاهش می‌یابد.

سخت

۶۹ ۱ ۲ ۳ **۴** با توجه به رابطه‌ی $x_۱ = \dfrac{\lambda D}{a}$، برای کم کردن فاصله‌ی دو نوار تاریک متوالی باید D یا λ کم و یا a زیاد شود و می‌دانیم که پرتو نور بنفش انرژی بیش‌تری از پرتو نور سبز دارد بنابراین (سبز $\lambda <$ بنفش λ) و در نتیجه ایجاد این تغییر فاصله‌ی دو نوار تاریک متوالی را کاهش می‌دهد.

متوسط

۷۰ ۱ **۲** ۳ ۴

$$۲\lambda = ۱۰۰۰nm \Rightarrow \lambda = ۵۰۰nm$$

اختلاف فاصله وسط سومین نوار تاریک تا دو شکاف $= ۵\dfrac{\lambda}{۲} = ۵ \times \dfrac{۵۰۰}{۲}nm = \dfrac{۲۵۰۰}{۲}nm = ۱۲۵۰nm$

متوسط

۷۱ ۱ **۲** ۳ ۴ طبق تعریف سرعت انتشار موج‌های الکترومغناطیسی در خلأ، داریم: $c = \dfrac{۱}{\sqrt{\varepsilon_\circ \mu_\circ}}$

بنابراین:

$$B = B_m \sin ۴\pi \times ۱۰^{۱۴}(t - \frac{۵}{۴c}x)$$

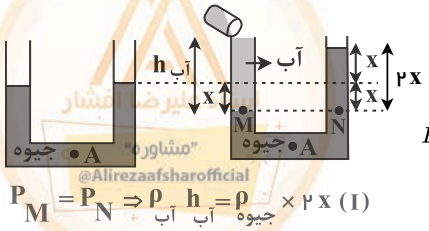
با مقایسه‌ی تابع میدان مغناطیسی موج داده شده با تابع میدان مغناطیسی موجی که در جهت محور xها پیش‌روی می‌کند، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} B = B_m \sin(\omega t - kx) \\ B = B_m \sin(۴\pi \times ۱۰^{۱۴}t - \dfrac{۵\pi \times ۱۰^۶}{۳}x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = ۴\pi \times ۱۰^{۱۴} \frac{rad}{s} \\ k = \dfrac{۵\pi \times ۱۰^۶}{۳} \frac{rad}{m} \end{cases} \Rightarrow n = \frac{c}{V} \xrightarrow{V=\frac{\omega}{k}} n = \frac{kc}{\omega}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\frac{۵\pi \times ۱۰^۶}{۳} \times ۳ \times ۱۰^۸}{۴\pi \times ۱۰^{۱۴}} = \frac{۵}{۴}$$

سخت

۷۲ **۱** ۲ ۳ ۴ با ریختن آب در یکی از شاخه‌ها، برای محاسبه‌ی افزایش فشار در نقطه‌ی A، باید مقدار تغییر ارتفاع جیوه در شاخه‌ی دیگر لوله را به دست آوریم. مطابق شکل مقابل، با ریختن آب در سمت چپ لوله، سطح جیوه در آن شاخه کمی پایین رفته و در شاخه‌ی مقابل به همان مقدار، بالا می‌آید.



$$P_M = P_N \Rightarrow \rho_{آب} h_{آب} = \rho_{جیوه} \times ۲x \ (I)$$

"مشاوره" علیرضا افشار
@Alirezaafsharofficial

$$P_M = P_N \Rightarrow \rho_{آب} h_{آب} = \rho_{جیوه} \times ۲x \ (I)$$

در ادامه برای یافتن $h_{آب}$ باتوجه به رابطه‌ی $\rho = \frac{m}{V}$ و اینکه جرم آب $68g$ است، می‌توان نوشت:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow ۱ = \frac{۶۸}{V} \Rightarrow V = ۶۸cm^۳ \xrightarrow[A=۲cm^۲]{V=Ah} ۲ \times h_{آب} = ۶۸ \Rightarrow h_{آب} = ۳۴cm$$

حال با کمک رابطه‌ی (I) داریم:

$$\xrightarrow{(I)} ۱ \times ۳۴ = ۱۳٫۶ \times ۲x \Rightarrow x = ۱٫۲۵cm$$

بنابراین ارتفاع جیوه در شاخه‌ی سمت راست لوله‌ی فوق به اندازه‌ی $1٫25cm$ نسبت به وضعیت اولیه افزایش می یابد. اما نکته‌ی جالب آن است که باتوجه به اصل پاسکال، فشار در تمامی نواحی (از جمله نقطه‌ی A در پایین لوله) به اندازه‌ی ۱٫۲۵ سانتی‌متر جیوه افزایش می‌یابد.

متوسط

۷۳ ۱ ۲ **۳** ۴ حجمی که با رابطه چگالی و جرم جسم بدست می‌آید، حجم خالص (توپر) کره می‌باشد:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow ۲٫۷ = \frac{۱۰۸۰}{V} \Rightarrow V = ۴۰۰cm^۳$$ حجم واقعی

یعنی اگر کره حفره نداشته باشد، حجم آن $۴۰۰cm^۳$ است، اما حجم کره‌ای که حفره دارد برابر است با:

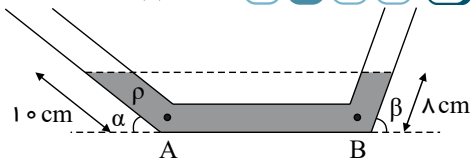
$$V' = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ \Rightarrow V' = \frac{۴}{۳} \times ۳ \times (۵)^۳ \Rightarrow V' = ۵۰۰cm^۳$$ حجم ظاهری

بنابراین داریم: حجم واقعی- حجم ظاهری= حجم حفره $\Rightarrow V_{حفره} = ۵۰۰ - ۴۰۰ = ۱۰۰cm^۳$

پس: درصد حجم حفره به حجم کره : $\frac{V_{حفره}}{V'} = \frac{۱۰۰}{۵۰۰} \times ۱۰۰ = ۲۰\%$

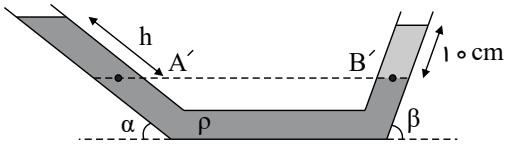
متوسط

۷۴ ۱ **۲** ۳ ۴ در شکل (۱)، با توجه به برابری فشار در نقاط هم تراز یک مایع ساکن، داریم :



$$P_A = P_B$$
$$\Rightarrow \rho g h_A \sin\alpha + P_۰ = \rho g h_B \sin\beta + P_۰$$
$$\Rightarrow ۱۰ \sin\alpha = ۸ \sin\beta \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{۴}{۵} \quad (۱)$$

در شکل (۲) نیز با توجه به برابری فشار در نقاط هم‌تراز یک مایع ساکن، داریم :



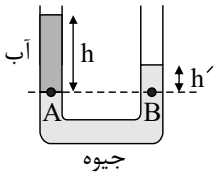
$$P_{A'} = P_{B'}$$
$$\Rightarrow \rho g h \sin\alpha + P_۰ = \rho' g h' \sin\beta + P_۰$$
$$\Rightarrow h \sin\alpha = ۰٫۶ \times ۱۰ \sin\beta$$
$$\Rightarrow h = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \times ۶ \xrightarrow{(۱)} h = \frac{۵}{۴} \times ۶ \Rightarrow h = ۷٫۵cm$$

سخت

۷۵ ۱ ۲ **۳** ۴ ارتفاع آب اضافه شده به جیوه را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$m = \rho V \xrightarrow[V=Ah, \rho=۱\frac{g}{cm^۳}]{m=۵۴٫۴g} ۵۴٫۴ = ۲ \times h \times ۱ \Rightarrow h = ۲۷٫۲cm$$

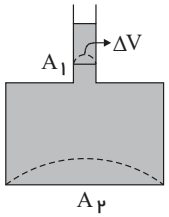
با اضافه کردن آب، به جیوه، اختلاف سطح جیوه در دو لوله به اندازه‌ی h' می‌شود. باتوجه به شکل زیر داریم:



$$P_B = P_A \Rightarrow \rho_{جیوه} h' = \rho_{آب} h$$
$$\Rightarrow ۱۳٫۶ \times h' = ۱ \times ۲۷٫۲ \Rightarrow h' = ۲cm$$

سخت

۷۶ ۱ ۲ ۳ **۴** بنابر اصل پاسکال هرگونه فشار وارد بر یک شاره محصور در یک ظرف بدون تغییر به همه‌ی نقاط مایع و دیواره‌های ظرف وارد می‌شود. اگر فشار ناشی از اضافه شدن ΔV مایع بر سطح مقطع بالایی ظرف $P_۱$ و فشار وارد بر سطح مقطع پایینی ظرف را $P_۲$ بگیریم، داریم:



$$P_۱ = P_۲ \Rightarrow \frac{F_۱}{A_۱} = \frac{F_۲}{A_۲} \Rightarrow \frac{m_۱ g}{A_۱} = \frac{F_۲}{A_۲} \rightarrow \frac{\rho \Delta V g}{A_۱} = \frac{F_۲}{A_۲}$$
$$\Rightarrow \frac{۴ \times ۱۰^۳ \times ۱۰ \times ۱۰۰ \times ۱۰^{-۶}}{\pi(۱ \times ۱۰^{-۲})^۲} = \frac{F_۲}{\pi(۴۰ \times ۱۰^{-۲})^۲} \Rightarrow F_۲ = ۶۴۰۰N$$

سخت

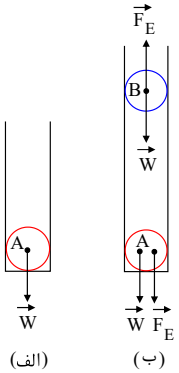
استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

۷۷ ۱ ۲ ۳ ۴

در شکل (الف) نیروی وارد بر کف استوانه ناشی از نیروی وزن گلوله‌ی A است. $F_۱ = W$

در شکل (ب) چون گلوله‌ها مشابه و دارای بار الکتریکی هم نام و برابرند با نیروی الکتریکی F_E یکدیگر را می‌رانند. در نتیجه نیرویی که در این حالت بر کف استوانه وارد می‌شود برابر است با:

$$F_۲ = W + F_E \xrightarrow{F_E = W} F_۲ = W + W = ۲W$$



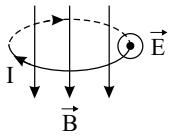
بنابراین داریم:

$$P = \frac{F}{A} \Rightarrow \frac{P_۲}{P_۱} = \frac{F_۲}{F_۱} \Rightarrow \frac{P_۲}{۴۰} = \frac{۲W}{W} \Rightarrow P_۲ = ۲ \times ۴۰ = ۸۰Pa$$

سخت

۷۸ ۱ ۲ ۳ ۴

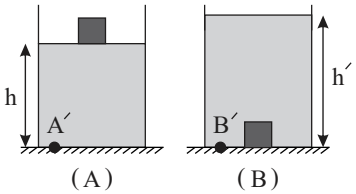
با تغییر میدان مغناطیسی، میدان الکتریکی القائی $\vec{E}$ ایجاد می‌شود. میدان الکتریکی ایجاد شده، جریانی هم‌جهت با خود در حلقه‌ی فلزی ایجاد می‌کند. باتوجه به قانون لنز جریان القائی باید در جهتی باشد که با تغییرات میدان مغناطیسی مخالفت کند. بنابراین جریان الکتریکی ساعتگرد القا شده و میدان الکتریکی در نقطه‌ی A مماس بر حلقه به‌صورت برون‌سو است تا بتواند میدان مغناطیسی در جهت پایین را تقویت کند.



متوسط

۷۹ ۱ ۲ ۳ ۴

مطابق شکل با انداختن وزنه‌ی آهنی داخل ظرف آب، ارتفاع آب افزایش می‌یابد. اگر ظرف‌ها مشابه و سطح مقطع آنها برابر A باشد، در اینصورت ارتفاع آب در ظرف (B) برابر می‌شود با:



$$h' = h + \Delta h \xrightarrow{V = A\Delta h} h' = h + \frac{V_{\text{آهن}}}{A} \xrightarrow{\rho = \frac{m}{V}} h' = h + \frac{\frac{m_{\text{آهن}}}{\rho_{\text{آهن}}}}{A} \Rightarrow h' = h + \frac{m_{\text{آهن}}}{\rho_{\text{آهن}} \times A}$$

اکنون با محاسبه‌ی فشار در نقاط A' و B' داریم:

$$P_{A'} = P_۰ + \rho_{\text{آب}} gh + \frac{W_{\text{آهن}}}{A} = P_۰ + \rho_{\text{آب}} gh + \frac{m_{\text{آهن}} g}{A}$$

$$P_{B'} = P_۰ + \rho_{\text{آب}} gh' = P_۰ + \rho_{\text{آب}} g(h + \frac{m_{\text{آهن}}}{\rho_{\text{آهن}} \times A}) = P_۰ + \rho_{\text{آب}} gh + \frac{\rho_{\text{آب}} g m_{\text{آهن}}}{\rho_{\text{آهن}} \times A}$$

با مقایسه‌ی $P_{A'}$ و $P_{B'}$ داریم:

$$\rho_{\text{آب}} < \rho_{\text{آهن}} \Rightarrow \frac{\rho_{\text{آب}}}{\rho_{\text{آهن}}} < ۱ \Rightarrow \frac{\rho_{\text{آب}} g m_{\text{آهن}}}{\rho_{\text{آهن}} A} < \frac{m_{\text{آهن}} g}{A} \Rightarrow P_{B'} < P_{A'}$$

سخت

۸۰ ۱ ۲ ۳ ۴

با استفاده از تعریف چگالی، حجم فلز هر مکعب را به دست می‌آوریم:

مکعب توپُر: $V_۱ = \frac{m_۱}{\rho} \Rightarrow V_۱ = \frac{۶۰۰}{۸} \Rightarrow V_۱ = ۷۵cm^۳$

مکعب توخالی: $V_۲ = \frac{m_۲}{\rho} \Rightarrow V_۲ = \frac{۴۸۰}{۸} \Rightarrow V_۲ = ۶۰cm^۳$

چون مکعب‌ها مشابه هستند، حجم حفره‌ی داخل مکعب توخالی برابر است با:

$$V' = V_۱ - V_۲ = ۷۵ - ۶۰ \Rightarrow V' = ۱۵cm^۳$$

متوسط

۸۱ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم که فشار کل در یک نقطه در درون یک مایع برابر با مجموع فشار هوا و فشار ناشی از ستون مایع روی آن نقطه است. بنابراین خواهیم داشت:

$$P_{\text{مایع}} + P_۰ = P_{\text{کل}} \Rightarrow P_{\text{مایع}} + ۷۵cmHg = ۲۷۵cmHg \Rightarrow P_{\text{مایع}} = ۲۰۰cmHg = ۲mHg$$

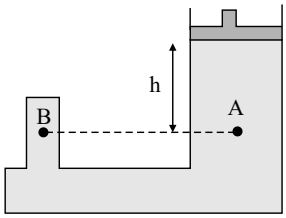
اکنون برای محاسبه‌ی چگالی مایع، فشار ناشی از ستونی از مایع به ارتفاع ۳ متر را برابر با فشار ستونی از جیوه به ارتفاع ۲ متر قرار می‌دهیم:

$$\rho_{\text{جیوه}} gh_{\text{جیوه}} = \rho_{\text{مایع}} gh_{\text{مایع}} \Rightarrow \rho_{\text{جیوه}} \times h_{\text{جیوه}} = \rho_{\text{مایع}} \times h_{\text{مایع}} \Rightarrow ۱۳۵۰۰ \times ۲ = \rho_{\text{مایع}} \times ۳ \Rightarrow \rho_{\text{مایع}} = ۹۰۰۰ \frac{kg}{m^۳}$$

متوسط

"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

۸۲ ۱ ۲ ۳ **۴** فشار در نقاط هم‌تراز از یک مایع ساکن، برابر است، بنابراین در شکل زیر، فشار در نقاط A و B با هم برابر است و می‌توان نوشت:



$$P_B = P_A \Rightarrow P_B = \rho gh + \frac{W}{A} + P_\circ$$

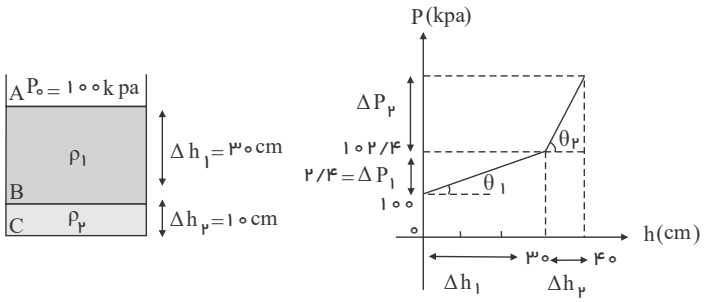
$$P_B - P_\circ = \rho gh + \frac{W}{A}$$

$$\Rightarrow P_B - P_\circ = ۲۰۰۰ \times ۱۰ \times \frac{۲۵}{۱۰۰} + \frac{۲۰ \times ۱۰}{۴ \times ۱۰^{-۴}} = ۵۰۵ \times ۱۰^{۳} Pa$$

$$\Rightarrow P_B - P_\circ = ۵۰۵ kPa$$

سخت

۸۳ ۱ ۲ ۳ **۴**



در نمودار بالا $(\Delta P_۱)$ اختلاف فشار بین دو نقطه‌ی $(A$ و $B)$ سطح مایع و کف مایع (۱) می‌باشد. با استفاده از $\Delta P_۱$ می‌توانیم $\rho_۱$ را به‌دست آوریم.

$$\Delta P_۱ = \rho_۱ \cdot g \cdot \Delta h_۱ \Rightarrow ۲/۴ \times ۱۰^{۳} = \rho_۱ \times ۱۰ \times ۳۰ \times ۱۰^{-۲} \Rightarrow \rho_۱ = ۸۰۰ \frac{kg}{m^۳}$$

در نمودار بالا $\tan\theta$ برابر $\frac{\Delta P}{\Delta h}$ می‌باشد.

در نتیجه از اطلاعات مسئله $\tan\theta_۲ = ۱۷ \tan\theta_۱$ استفاده می‌کنیم و $\Delta P_۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\tan\theta_۲ = ۱۷ \tan\theta_۱ \Rightarrow \frac{\Delta P_۲}{\Delta h_۲} = ۱۷(\frac{\Delta P_۱}{\Delta h_۱}) \Rightarrow \frac{\Delta P_۲}{۱۰} = ۱۷ \times (\frac{۲/۴}{۳})$$

$$\Rightarrow \Delta P_۲ = ۱۳/۶ kPa = ۱۳۶۰۰ Pa$$

و $\Delta P_۲$ اختلاف فشار بین دو نقطه‌ی $(B$ و $C)$ سطح و کف مایع (۲) است.

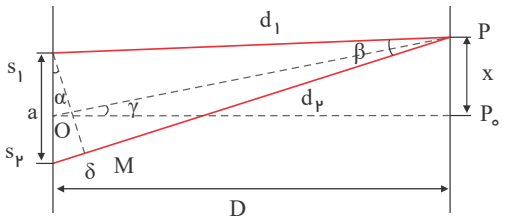
$$\Delta P_۲ = \rho_۲ \cdot g \cdot \Delta h_۲ \Rightarrow ۱۳۶۰ = \rho_۲ \times ۱۰ \times (۱۰ \times ۱۰^{-۲}) \Rightarrow \rho_۲ = ۱۳۶۰۰ \frac{kg}{m^۳}$$

سخت

۸۴ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\tan\gamma = \tan\alpha = \frac{\delta}{a} \xrightarrow[\tan\gamma \simeq \gamma]{\text{نوار روشن } \delta = n\lambda} \gamma = \frac{n\lambda}{a} \Rightarrow \gamma = \frac{۲۰ \times ۰/۶ \times ۱۰^{-۶}}{۲/۴ \times ۱۰^{-۳}} = ۵ \times ۱۰^{-۳} rad$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{۵ \times ۱۰^{-۳} \times ۱۸۰}{\pi} = \frac{۵ \times ۱۰^{-۳} \times ۱۸۰}{۳} = ۰/۳ \text{ درجه}$$



سخت

۸۵ ۱ ۲ ۳ **۴** عامل بالا رفتن مایع در داخل لولهٔ باریک (مویین) نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های مایع و مولکول‌های لوله است. آب تا آن‌جا بالا می‌رود که برایند این نیروها با وزن آب درون لوله برابر شود:

$$F = mg = \rho V \cdot g = \rho(\frac{\pi d^۲}{۴} h)g$$

$$\Rightarrow F = ۱۰۰۰ \times (\frac{۳ \times (۱ \times ۱۰^{-۳})^۲}{۴} \times \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۱۰) = ۷۵۰ \times ۱۰^{-۶} \times ۲$$

$$\Rightarrow F = ۱/۵ \times ۱۰^{-۳} N$$

متوسط

۸۶ ۱ **۲** ۳ ۴ با افزایش دمای آب از $۶^\circ C$ تا $۳^\circ C$ حجم آب کاهش می‌یابد، چون جرم آب ثابت است. کاهش حجم باعث افزایش چگالی می‌شود.

$$\uparrow \rho = \frac{m}{V \downarrow}$$

از طرفی سطح مقطع ظرف ثابت است و a کاهش حجم باعث کاهش ارتفاع آب می‌شود.

استاد علیرضا افشار
"مشاوره" alirezaafsharofficial

$$\downarrow V = \underset{\text{ثابت}}{A} \times h \downarrow$$

فشار نقاط A و B در مایع از رابطهٔ $p = \rho gh$ حساب می‌شود. چگالی افزایش و حجم کاهش یافته پس فشار ثابت می‌ماند.

متوسط

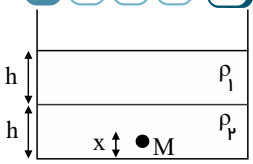
۸۷ ۱ ۲ ۳ ۴ طبق رابطهٔ $\rho = \frac{m}{V}$ و با توجه به ثابت بودن جرم سه مایع، می‌توان گفت مایعی که حجم کمتری داشته است، بیش‌ترین چگالی را دارد و در ظرف، پایین‌تر قرار خواهد گرفت. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} L_۱ : V_۱ = (۲A)(\frac{۱}{۲}h) = Ah \\ L_۲ : V_۲ = (\frac{۱}{۲}A)(h) = \frac{۱}{۲}Ah \\ L_۳ : V_۳ = (A)(۲h) = ۲Ah \end{array}\right\} \Rightarrow V_۳ > V_۱ > V_۲ \xrightarrow[\rho = \frac{m}{V}]{m_۱ = m_۲ = m_۳} \rho_۳ < \rho_۱ < \rho_۲$$

بنابراین زمانی که سه مایع را در یک ظرف می‌ریزیم، مایع $L_۲$ در پایین‌ترین موقعیت، سپس مایع $L_۱$ در وسط و در نهایت مایع $L_۳$ در بالاترین موقعیت قرار خواهد گرفت.

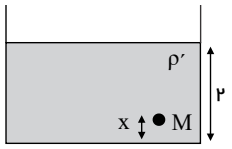
سخت

۸۸ ۱ ۲ ۳ ۴ در حال اول داریم:



$$P_M = \rho_۱ gh + \rho_۲ gh - \rho_۲ gx \Rightarrow P_M = gh(\rho_۱ + \rho_۲) - \rho_۲ gx$$

در حالت دوم داریم:



$$P'_M = (\frac{\rho_۱ + \rho_۲}{۲})g۲h - \frac{\rho_۱ + \rho_۲}{۲}gx$$

$$\Rightarrow P'_M = (\rho_۱ + \rho_۲)gh - \frac{\rho_۱ + \rho_۲}{۲}gx$$

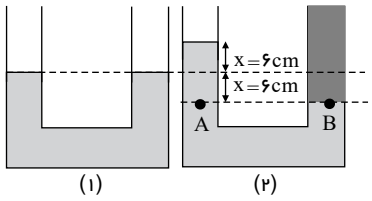
از طرفی می‌توان نوشت:

$$\rho_۲ > \rho_۱ \Rightarrow \rho_۲ + \rho_۲ > \rho_۱ + \rho_۲ \Rightarrow \rho_۲ > \frac{\rho_۱ + \rho_۲}{۲}$$

$$\Rightarrow \rho_۲ gx > \frac{\rho_۱ + \rho_۲}{۲}gx \Rightarrow P_M < P'_M$$

سخت

۸۹ ۱ ۲ ۳ ۴ با افزودن آب به یکی از شاخه‌ها، سطح جیوه در آن لوله کمی پایین و در شاخهٔ دیگر به همان مقدار بالا می‌رود. پس مطابق شکل اختلاف ارتفاع جیوه در دو شاخه برابر $۲x$ می‌شود، با توجه به برابری فشار در نقاط هم‌تراز از یک مایع ساکن، می‌توان نوشت:



$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_{Hg} h_{Hg} = \rho_W h_W$$

$$\Rightarrow ۱۳٫۵ \times ۱۲ = ۱h_W \Rightarrow h_W = ۱۶۲cm$$

متوسط

۹۰ ۱ ۲ ۳ ۴ باتوجه به چگالی آب، $۷۰cm^۳$ آب معادل $۷۰g$ آب می‌باشد. طبق اصل پاسکال داریم:

$$\Delta P_۱ = \Delta P_۲ \Rightarrow \frac{mg}{a} = \frac{\Delta F}{A} \Rightarrow \frac{۷۰ \times ۱۰^{-۳} \times ۱۰}{۲۰} = \frac{\Delta F}{۱۰۰} \Rightarrow \Delta F = ۳٫۵N$$

متوسط

۹۱ ۱ ۲ ۳ ۴ آهن در سری الکتروشیمیایی باتوجه به منفی‌تر بودن E° آن، از مس بالاتر است بنابراین می‌تواند یون‌های $Cu^{۲+}$ را کاهش دهد.

متوسط

۹۲ ۱ ۲ ۳ ۴

واکنش اول در ۲ ضرب و معکوس می‌کنیم:

$$۱)\ ۲H_۲O(l) + ۲SO_۲(g) \rightarrow ۲H_۲S(g) + ۳O_۲(g) \quad \Delta H = ۱۱۲۵٫۲$$

واکنش دوم بدون تغییر:

$$۲)\ CS_۲(l) + ۳O_۲(g) \rightarrow CO_۲(g) + ۲SO_۲(g) \quad \Delta H = -۱۰۷۵٫۲$$

$$CS_۲(l) + ۲H_۲O(l) \rightarrow CO_۲(g) + ۲H_۲S(g)$$

$$\Delta H = ۱۱۲۵٫۲ + (-۱۰۷۵٫۲) \rightarrow \Delta H = +۵۰kJ$$

$$H_۲S \text{ تشکیل مولی } \Delta H = +\frac{۵۰}{۲} = ۲۵kJmol^{-۱}$$

برای تولید ۲ مول $H_۲S$، ۵۰ کیلوژول گرما مصرف شده، پس برای تولید ۱ مول $H_۲S$، ۲۵ کیلوژول گرما لازم است.

سخت

۹۳ ۱ ۲ ۳ ۴ برای کاهش میزان اسیدی بودن خاک به آن آهک می‌افزایند.

بررسی گزینه ۳: واکنش سدیم اکسید با آب:

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

$Na_۲O(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲NaOH(aq)$

$?molNaOH = ۰/۰۵molNa_۲O \times \frac{۲molNaOH}{۱molNa_۲O} = ۰/۱molNaOH$

مولاریته $M = \frac{۰/۱}{۱} = ۰/۱mol \cdot L^{-۱}$

$[OH^-] = M \times n \times \alpha \xrightarrow[\text{باز قوی}]{NaOH} [OH^-] = ۰/۱ \times ۱ \times ۱ = ۰/۱mol \cdot L^{-۱}$

$pOH = -\log[OH^-] = -\log ۱۰^{-۱} = ۱ \rightarrow pH = ۱۳$

متوسط

۹۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

طبق رابطه‌ی مقابل:

$۴NH_۳ + ۵O_۲ \rightarrow ۴NO + ۶H_۲O$

$\Delta H = \left[\begin{array}{c}\text{مجموع آنتالپی}\\ \text{تشکیل فراورده‌ها}\end{array}\right] - \left[\begin{array}{c}\text{مجموع آنتالپی}\\ \text{تشکیل واکنش‌دهنده‌ها}\end{array}\right]$

$\Delta H = [۶(-۲۴۲) + ۴(+۹۰)] - [۴(-۲۶)] \Rightarrow \Delta H = -۹۸۸\ kJ/mol$

متوسط

۹۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

باتوجه به این‌که واکنش (I) انجام‌پذیر است می‌توان دریافت که پتانسیل الکترودی A بزرگ‌تر از پتانسیل الکترودی B است. از سوی دیگر باتوجه به این که واکنش (II) انجام‌پذیر نیست می‌توان دریافت که پتانسیل الکترودی B بزرگ‌تر از پتانسیل الکترودی D است.

باتوجه به جدول E° محلول نمک عنصری را که E° بزرگ‌تری دارد (مانند نمک A) را نمی‌توان در ظرفی از عنصری با E° کوچک‌تر (D) نگهداری نمود. زیرا با آن واکنش می‌دهد.

در مورد گزینه‌های دیگر باید گفت که باتوجه به مقادیر E°، ترتیب کاهندگی فلزها و اکسندگی کاتیون‌ها به صورت زیر است:

ترتیب کاهندگی : $D > B > A$

ترتیب اکسندگی : $D^{۲+} < B^{۲+} < A^{۲+}$

جدول E°
$D^{۲+} / D$
$B^{۲+} / B$
$A^{۲+} / A$

افزایش E°

متوسط

۹۶ ۱ **۲** ۳ ۴

ΔH این واکنش مثبت است، پس یک واکنش گرماگیر است (عامل نامساعد) و برای آن که خودبه‌خود پیشرفت کند باید عامل بی‌نظمی در آن مساعد باشد. یعنی واکنش باید با افزایش بی‌نظمی همراه باشد و همان‌گونه که مشاهده می‌کنید تعداد مول‌های گازی در سمت راست معادله افزایش یافته است.

متوسط

۹۷ ۱ **۲** ۳ ۴

$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۳}$

برای اسید ضعیف‌تر داریم:

$K_a = \frac{[H^+]^۲}{C_M} \Rightarrow ۲ \times ۱۰^{-۵} = \frac{(۱۰^{-۳})^۲}{C_M} \Rightarrow C_M = ۵ \times ۱۰^{-۲}$

برای اسید قوی‌تر داریم:

$K_a = \frac{[H^+]^۲}{C'_M - [H^+]} \Rightarrow ۲ \times ۱۰^{-۳} = \frac{(۱۰^{-۳})^۲}{C'_M - ۱۰^{-۳}}$

$C'_M - ۱۰^{-۳} = ۵ \times ۱۰^{-۴} \Rightarrow C'_M = ۵ \times ۱۰^{-۴} + ۱۰^{-۳} = ۱۵ \times ۱۰^{-۴}$

$\frac{C'_M}{C_M} = \frac{۱۵ \times ۱۰^{-۴}}{۵ \times ۱۰^{-۲}} = ۰/۰۳$

سخت

۹۸ ۱ ۲ **۳** ۴

$C_۲H_۵OH = ۴۶\frac{g}{mol}$

ظرفیت گرمایی مولی = $۸۶۲/۵\frac{J}{^oC} \times \frac{۱}{۵۰۰mL} \times \frac{۱mL}{۰/۶۹g} \times \frac{۴۶g}{۱mol} = ۱۱۵\frac{J}{mol.^oC}$

متوسط

۹۹ ۱ ۲ **۳** ۴

$[H^+] = M \cdot \alpha$

مولاریته $M = \frac{n}{V} \Rightarrow \frac{۲/۵ \times ۱۰^{-۷}mol}{۱ \times ۱۰^{-۳}L} = ۲/۵ \times ۱۰^{-۴}mol \cdot L^{-۱}$

$pH = ۵ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-pH} \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۵}$

استاد علیرضا افشار
مشاور
@Alirezaafsharofficial

$$۱۰^{-۵} = ۲٫۵ \times ۱۰^{-۴} \times \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{۱}{۲۵} = ۰٫۰۴$$

$$\alpha\%\ (\text{درصد تفکیک یونی}) = \alpha\ (\text{درجه تفکیک یونی}) \times ۱۰۰$$
$$\alpha\% = ۰٫۰۴ \times ۱۰۰ = ۴$$

سخت

۱۰۰ ۱ ۲ ۳ **۴** واکنش تشکیل فسفریک اسید به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{۳}{۲}H_۲(g) + \frac{۱}{۴}P_۴(s) + ۲O_۲(g) \rightarrow H_۳PO_۴(aq)$$

براساس واکنش فوق، واکنش‌های داده شده را مرتب می‌کنیم:

واکنش (الف) را معکوس کرده و ضرایب را بر ۴ تقسیم می‌کنیم:

$$۱)\ \frac{۱}{۴}P_۴(s) + \frac{۵}{۴}O_۲(g) \rightarrow \frac{۱}{۴}P_۴O_{۱۰}(s) \quad \Delta H'_۱ = -\frac{a}{۴}kJ$$

واکنش (ب) را معکوس کرده و ضرایب را در $\frac{۳}{۲}$ ضرب می‌کنیم:

$$۲)\ \frac{۳}{۲}H_۲(g) + \frac{۳}{۴}O_۲(g) \rightarrow \frac{۳}{۲}H_۲O(l) \quad \Delta H'_۲ = -\frac{b}{۲}kJ$$

واکنش (پ) را بر عدد ۴ تقسیم می‌کنیم:

$$۳)\ \frac{۱}{۴}P_۴O_{۱۰}(s) + \frac{۳}{۲}H_۲O(l) \rightarrow H_۳PO_۴(aq) \quad \Delta H'_۳ = \frac{c}{۴}kJ$$

از جمع سه واکنش بالا، واکنش تشکیل فسفریک اسید و آنتالپی آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta H = \Delta H'_۱ + \Delta H'_۲ + \Delta H'_۳ = -\frac{a}{۴} - \frac{b}{۲} + \frac{c}{۴} = \frac{c - ۲b - a}{۴}kJ$$

آنتالپی فوق برای یک مول فسفریک اسید می‌باشد، حال برای تشکیل ۱۹۶ گرم فسفریک اسید گرمای مبادله شده را محاسبه می‌کنیم:

$$?kJ = ۱۹۶gH_۳PO_۴ \times \frac{۱molH_۳PO_۴}{۹۸gH_۳PO_۴} \times \frac{(\frac{c-a-۲b}{۴})kJ}{۱molH_۳PO_۴} = \frac{c - a - ۲b}{۲}kJ$$

سخت

۱۰۱ ۱ ۲ ۳ ۴ $CH_۳COOH$ ، یک اسید ضعیف است. در محلول اسید، با استفاده از مقدار pH و درصد یونش، می‌توانیم غلظت مولی را به دست آوریم.

$$pH = ۳٫۳ \Rightarrow [H_۳O^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۳٫۳} = ۱۰^{+۰٫۷-۴}$$
$$= ۱۰^{۰٫۷} \times ۱۰^{-۴} = ۵ \times ۱۰^{-۴} mol \cdot L^{-۱}$$

$$\text{درجهٔ یونش}(\alpha) = \frac{\text{درصد یونش}(\%\alpha)}{۱۰۰} \Rightarrow \alpha = \frac{۲٫۵}{۱۰۰} = ۲٫۵ \times ۱۰^{-۲}$$

$$[H_۳O^+] = M_۱ \times \alpha \Rightarrow ۵ \times ۱۰^{-۴} = M_۱ \times (۲٫۵ \times ۱۰^{-۲}) \Rightarrow M_۱ = ۰٫۰۲ mol \cdot L^{-۱}$$

$Ba(OH)_۲$ ، یک باز قوی دو ظرفیتی است، بنابراین $\alpha = ۱$ و $n = ۲$ است. با استفاده از مقدار pH ، غلظت مولی این باز را مشخص می‌کنیم.

$$pH + pOH = ۱۴ \Rightarrow ۱۲ + pOH = ۱۴ \Rightarrow pOH = ۲$$
$$[OH^-] = ۱۰^{-pOH} = ۱۰^{-۲} mol \cdot L^{-۱}$$
$$[OH^-] = M_۲ \times n \times \alpha \Rightarrow ۱۰^{-۲} = M_۲ \times ۲ \times ۱ \Rightarrow M_۲ = ۵ \times ۱۰^{-۳} mol \cdot L^{-۱}$$

استیک اسید، توسط باز قوی $Ba(OH)_۲$ خنثی می‌شود، بنابراین می‌توانیم از رابطهٔ زیر استفاده کنیم.

$$[M_۲ \times V_۲ \times n_۲]_{Ba(OH)_۲} = [M_۱ \times V_۱ \times n_۱]_{CH_۳COOH}$$
$$Ba(OH)_۲ \Rightarrow n_۲ = ۲\ ,\ CH_۳COOH \Rightarrow n_۱ = ۱$$
$$\Rightarrow ۵ \times ۱۰^{-۳} \times V_۲ \times ۲ = ۰٫۰۲ \times ۰٫۵ \times ۱ \Rightarrow V_۲ = ۱L\ Ba(OH)_۲ \text{ محلول}$$

سخت

۱۰۲ ۱ ۲ ۳ ۴ فقط عبارت اول درست. واکنش مربوط به دفاع سوسک بمب‌افکن به صورت زیر است:

$$C_۶H_۶O_۲(aq) + H_۲O_۲(aq) \rightarrow C_۶H_۴O_۲(aq) + ۲H_۲O(l)$$

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت دوم: محفظه‌ی انجام واکنش در گرماسنج بمبی نوع سامانه بسته است نه منزوی.

عبارت سوم: ΔH مرحله اول واکنش تولید آمونیاک (از گازهای $N_۲$ و $H_۲$) را باید از روش‌های غیرمستقیم (نه مستقیم!) محاسبه کرد.

عبارت چهارم: واکنش $C(s) + \frac{۱}{۲}O_۲(g) \rightarrow CO(g)$ (گرافیت C(s,را نمی‌توان به صورت تجربی (در آزمایشگاه) انجام داد.

متوسط

۱۰۳ ۱ ۲ ۳ ۴ همهٔ عبارت‌ها به درستی بیان شده‌اند.

عبارت «آ»: در شرایط استاندارد ترمودینامیکی دما $۲۵^\circ C$ و در شرایط STP دما $۰^\circ C$ است و خودیونش آب فرایندی گرماگیر است و K_W در دمای $۲۵^\circ C$ برابر $۱۰^{-۱۴}$ است. حال اگر دما را کاهش دهیم براساس اصل لوشاتلیه واکنش در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود و مقدار K کاهش می‌یابد.

$$q + ۲H_۲O(l) \rightleftharpoons H_۳O^+(aq) + OH^-(aq)$$

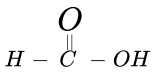
استاد علیرضا افشار
@Alirezaafsharofficial

عبارت «ب»: آشناترین کربوکسیلیک اسید، اتانوییک اسید و ساده‌ترین کربوکسیلیک اسید، متانوییک اسید است. متانوییک اسید، اسیدی قوی‌تر است و در نتیجه باز مزدوج آن پایدارتر از باز مزدوج اتانوییک اسید است.

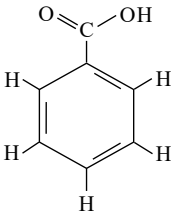
عبارت «پ»: محلولی که در آن $[H_۳O^+] = ۱۰^{-۱} mol \cdot L^{-۱}$ است، $pH = ۱$ دارد. در این pH هم متیل سرخ و هم آب کلم سرخ به رنگ سرخ دیده می‌شوند.

عبارت «ت»: بنزوییک اسید در تمشک وجود دارد و جوهر مورچه همان متانوییک اسید است.

متانوییک اسید: $CH_۲O_۲$:



بنزوییک اسید: $C_۷H_۶O_۲$:



تفاوت فرمول این دو اسید به میزان $C_۶H_۴$ است.

متوسط

۱۰۴ ۱ ۲ **۳** ۴ گرمای آزاد شده از سوختن ساکارز صرف بالا رفتن دمای آب و گرماسنج می‌شود که می‌توان از رابطه‌ی زیر به دست آورد:

$$Q_{کل} = Q_{آب} + Q_{گرماسنج}$$

$$Q_{کل} = (m_{آب} \times c_{آب} \times c_{گرماسنج})\Delta T$$

$$Q_{کل} = (۵۰۰ \times ۴/۲ + ۱۲۰۰) \times ۱۰ = ۳۳۰۰۰J = ۳۳KJ$$

$$?gC_{۱۲}H_{۲۲}O_{۱۱} = ۳۳kJ \times \frac{۱molC_{۱۲}H_{۲۲}O_{۱۱}}{۵۶۵۰kJ} \times \frac{۳۴۲gC_{۱۲}H_{۲۲}O_{۱۱}}{۱molC_{۱۲}H_{۲۲}O_{۱۱}} = ۲gC_{۱۲}H_{۲۲}O_{۱۱}$$

سخت

۱۰۵ ۱ **۲** ۳ ۴

$Zn(s) + ۲H^+(aq) \rightarrow Zn^{۲+}(aq) + H_۲(g)$	واکنش کلی سلول
$۲H^+(aq) + ۲e^- \rightarrow H_۲(g)$	نیم‌واکنش کاهش
$Zn(s) \rightarrow Zn^{۲+}(aq) + ۲e^-$	نیم‌واکنش اکسایش

اگر یک سلول گالوانی شامل SHE باشد جرم تیغهٔ پلاتینی در آن هیچ تغییری نمی‌کند و در این واکنش که SHE الکترود کاتد را تشکیل می‌دهد، جرم الکترود کاتدی ثابت می‌ماند. برای محاسبهٔ تعداد مول‌های مصرفی $H^+(aq)$ در نیم‌سلول کاتدی به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$?mol\ H^+(aq) = ۶/۰۲۲ \times ۱۰^{۲۳} e^- \times \frac{۱mol\ e^-}{۶/۰۲۲ \times ۱۰^{۲۳} e^-} \times \frac{۲mol H^+(aq)}{۲mol\ e^-} = ۱mol H^+(aq)$$

بنابراین به مقدار یک مول $H^+(aq)$ از مجموع تعداد مول‌های $H^+(aq)$ اولیه که در الکترولیت نیم‌سلول کاتدی وجود داشته است، مصرف شده است.

$$\text{مولاریته} = \frac{\text{تعداد مول‌های اولیه حل‌شونده } (H^+(aq))}{\text{حجم محلول بر حسب لیتر}} \Rightarrow ۱M = \frac{\text{تعداد مول‌های اولیه حل‌شونده } (H^+(aq))}{۵L}$$

$$\Rightarrow H^+(aq) \text{ تعداد مول‌های اولیه} = ۵mol$$

$$(H^+(aq)) \text{ تعداد مول‌های باقی‌مانده} = ۵ - ۱ = ۴mol$$

$$M = \frac{n}{V} = \frac{۴mol\ H^+(aq)}{۵L} = ۰/۸M$$

سخت

۱۰۶ **۱** ۲ ۳ ۴ مورد اول: هلیم چون تک اتمی است بنابراین حرکت ارتعاشی ندارد. بنابراین غلط است.

مورد دوم: چون فرآیند تشکیل الماس گرماگیر است پس عکس این فرآیند یعنی تبدیل الماس به گرافیت گرماده می‌باشد بنابراین صحیح است.

مورد سوم: چون سامانه منزوی تبادل گرما ندارد بنابراین میانگین سرعت حرکت ذرات آن با گذشت زمان ثابت باقی می‌ماند. پس صحیح است.

مورد چهارم: در مقایسه دو جسم با جرم برابر هر کدام ظرفیت گرمایی ویژه کم‌تری داشته باشد زودتر داغ می‌شود نه ظرفیت گرمایی مولی. پس غلط است.

سخت

۱۰۷ ۱ **۲** ۳ ۴ در محلول استیک اسید $(CH_۳COOH)$ ، مقدار pH و غلظت را داریم. بنابراین می‌توانیم، α (درجهٔ یونش) را به دست آوریم:

$$[H_۳O^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۳/۷} = ۱۰^{-۴+۰/۳} = ۱۰^{-۴} \times ۱۰^{۰/۳}$$

$$= ۲ \times ۱۰^{-۴} mol \cdot L^{-۱} (\log ۲ = ۰/۳ \Rightarrow ۱۰^{۰/۳} = ۲)$$

استاد علیرضا افشار
آموزش
@Alirezaafsharofficial

$$[H_3O^+] = M \times \alpha \Rightarrow ۲ \times ۱۰^{-۴} = (۴ \times ۱۰^{-۳}) \times \alpha \Rightarrow \alpha(CH_3COOH) = \frac{۲ \times ۱۰^{-۴}}{۴ \times ۱۰^{-۳}} = ۰/۰۵$$

درصد یونش در محلول اسید ضعیف HA، ۰/۴ برابر درصد یونش محلول CH_3COOH است، بنابراین درجهٔ یونش در محلول HA، ۰/۴ برابر درجهٔ یونش محلول CH_3COOH است:

محلول HA : $\alpha = ۰/۴ \times \alpha(CH_3COOH) = ۰/۴ \times ۰/۰۵ = ۰/۰۲$

HA، یک اسید ضعیف است، بنابراین برای این اسید می‌توانیم $1 - \alpha$ برابر یک در نظر گرفته و از رابطهٔ $K_a = M\alpha^2$ استفاده کنیم:

$$K_a = M\alpha^2 \Rightarrow ۲ \times ۱۰^{-۵} = M \times (۰/۰۲)^2 \Rightarrow M_{HA} = ۵ \times ۱۰^{-۲} mol \cdot L^{-1}$$

سخت

۱۰۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع } \Delta H_{\text{تشکیل}} \text{ فرآورده‌ها}] - [\text{مجموع } \Delta H_{\text{تشکیل}} \text{, واکنش‌دهنده}]$$

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = ۲\Delta H_{\text{تشکیل}} H_2O - ۲\Delta H_{\text{تشکیل}} H_2O_2 = ۲(-۲۸۶) - ۲(-۱۹۱/۵) = -۱۸۹ kJ$$

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$$

$$= -۱۸۹ - (۲۷۳ + ۲۷) \times ۱۴۰ J \cdot K^{-1} \times \frac{۱۰^{-۳} kJ}{۱ J} = -۲۳۱ kJ$$

متوسط

۱۰۹ ۱ ۲ ۳ ۴ در آند، فلز روی براساس نیم‌واکنش زیر الکترون از دست می‌دهد:

$$Zn(s) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + ۲e^-$$

در کاتد، یون‌های $H^+(aq)$ با جذب الکترون و براساس نیم‌واکنش زیر، گاز هیدروژن تولید می‌کنند:

$$۲H^+(aq) + ۲e^- \rightarrow H_2(g)$$

پس در این نیم‌واکنش‌ها، با داد و ستد ۲ مول الکترون مواجه هستیم:

$$?LH_2 = ۶/۰۲۲ \times ۱۰^{۲۲} e^- \times \frac{۱ mol\, e^-}{۶/۰۲۲ \times ۱۰^{۲۳} e^-} \times \frac{۱ mol\, H_2}{۲ mol\, e^-} \times \frac{۲۲/۴ LH_2}{۱ mol\, H_2} = ۱/۱۲ LH_2$$

متوسط

۱۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$C_A = c_A \times M_A = c_A M_A$$

$$C_B = c_B \times M_B = c_B M_B = \frac{c_A}{۲} \times \frac{۳}{۲} M_A = \frac{۳}{۴} c_A M_A$$

$$C_C = c_C \times M_C = \frac{c_A}{۳} \times ۳M_A = c_A M_A$$

۱) درست.

$$C_A = C_C = c_A M_A$$

۲) نادرست.

$$C_B = \frac{۳}{۴} c_A M_A < C_A = c_A M_A$$

۳) درست.

$$C_C = c_A M_A > C_B = \frac{۳}{۴} c_A M_A$$

۴) درست.

$$C_B = \frac{۳}{۴} c_A M_A = \frac{۳}{۴} C_C \Rightarrow C_C = \frac{۴}{۳} C_B$$

سخت

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴
۹۳	۱	۲	۳	۴
۹۴	۱	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	۴
۹۶	۱	۲	۳	۴
۹۷	۱	۲	۳	۴
۹۸	۱	۲	۳	۴
۹۹	۱	۲	۳	۴
۱۰۰	۱	۲	۳	۴
۱۰۱	۱	۲	۳	۴
۱۰۲	۱	۲	۳	۴
۱۰۳	۱	۲	۳	۴
۱۰۴	۱	۲	۳	۴
۱۰۵	۱	۲	۳	۴
۱۰۶	۱	۲	۳	۴
۱۰۷	۱	۲	۳	۴
۱۰۸	۱	۲	۳	۴
۱۰۹	۱	۲	۳	۴
۱۱۰	۱	۲	۳	۴

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial