نام و نام خانوادگی:

تعداد سوال: ۲۰

نام آزمون: آمار و مدل سازی تجربی کل کتاب

زمان برگزاری: ۲۰ دقیقه

افشار

مرکز مشاوره تحصیلی دکتر علیرضا افشار

۱ در جدول فراوانی تجمعی داده‌های آماری زیر اگر میانگین جامعه ۴۱ باشد، در نمودار دایره‌ای زاویه‌ی مربوط به دسته‌ی $[۳۹,۴۳)$ چند درجه است؟

نماینده‌ی دسته	۳۳	۳۷	۴۱	۴۵	۴۹
فراوانی تجمعی	۷	۱۷	۳۲	۴۴	a

۱) ۹۶° ۲) ۹۸° ۳) ۱۰۲° ۴) ۱۰۸°

۲ هشت داده‌ی آماری با میانگین ۱۰ و واریانس ۴ مفروض است. اگر دو داده‌ی ۸ و ۱۲ به آن‌ها افزوده شود، واریانس ۱۰ داده‌ی حاصل کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴٫۵ ۳) ۴٫۸ ۴) ۵

۳ اگر x متغیر کمی باشد، از اطلاعات جدول زیر، ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

$x_i-۱۲$	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲
f_i	۱	۳	۱	۳	۶	۲

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۴ در نمودار جعبه‌ای ۳۶ داده‌ی آماری، میانگین داده‌های دو طرف جعبه، جداگانه به ترتیب ۲۲ و ۳۰ می‌باشد، اگر میانگین تمام داده‌ها ۲۷٫۵ باشد، آنگاه میانگین داده‌های داخل جعبه کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۸٫۵ ۳) ۲۹ ۴) ۲۹٫۵

۵ تعدادی از داده‌های آماری در جدول

دسته‌ها	$۰-۲$	$۲-۴$	$۴-۶$	$۶-۸$
فراوانی	۲	$n+۳$	۴	$n-۱$

تنظیم شده است. اگر میانگین این داده‌ها در دسته‌ی $[۴,۶)$ قرار داشته باشد حداقل عدد طبیعی n کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۶ جدول زیر فراوانی نسبی داده‌های دسته‌بندی شده است، با تعیین α، مقدار واریانس کدام است؟

مرکز دسته	۸	۱۲	۱۶	۲۰
فراوانی دسته	۰٫۱	۰٫۲۵	۰٫۲	α

۱) ۱۶٫۵ ۲) ۱۶٫۸ ۳) ۱۷٫۲ ۴) ۱۷٫۶

۷ اگر میانگین داده‌های دسته بندی شده، برابر ۱۶ باشد، با تعیین فراوانی دسته‌ی چهارم مقدار واریانس کدام است؟

نماینده دسته	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
فراوانی	۵	۷	۱۰	a	۳

۱) ۴٫۸۵ ۲) ۴٫۹۲ ۳) ۵٫۵۵ ۴) ۵٫۷۴

۸ جدول فراوانی تجمعی تعدادی داده‌ی آماری به صورت زیر است. اگر زاویه‌ی مرکزی هر یک از دسته‌های سوم و آخر در نمودار دایره‌ای ۹۰° باشد، فراوانی مطلق دسته‌ی سوم کدام است؟

مرکز دسته	۲	۵	۸	۱۱	۱۴
فراوانی تجمعی	۵	y	۱۸	۲۱	x

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۹ داده‌های آماری دو رقمی با نمودار ساقه و برگ زیر را در ۷ طبقه دسته‌بندی می‌کنیم. اگر ۳۵ درصد داده‌ها کم‌تر از ۲۲ و ۵۵ درصد داده‌ها بیش‌تر یا مساوی ۲۶ باشند، کدام گزینه صحیح است؟

ساقه	برگ						
۱	۰	۱	۱	۲	۴	۸	۹
۲	x	y	z	۸	۸	۹	
۳	۰	۰	۱	۴	۶	۸	۸

(۱) y و x در یک دسته هستند.
(۲) z و y در یک دسته هستند.
(۳) z ، y و x در یک دسته هستند.
(۴) z ، y و x در دسته‌های متفاوت هستند.

۱۰ سه داده‌ی آماری با میانگین ۶ مفروض است. اگر داده‌ی ۲ به آن‌ها اضافه شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید ۱٫۲ برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی می‌شود. مجموع مربعات ۳ داده‌ی اولیه چه‌قدر است؟

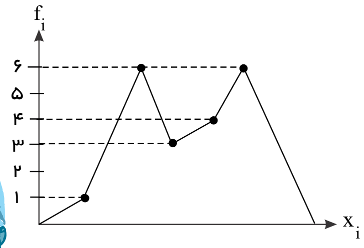
(۱) ۱۶۸ (۲) ۱۴۴ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۰۸

۱۱ داده‌های نمودار ساقه و برگ زیر را در ۵ دسته با طول مساوی دسته‌بندی می‌کنیم. فراوانی نسبی دسته‌ی دوم در این دسته‌بندی کدام است؟

ساقه	برگ						
۲	۲	۳	a	۵	۶	۸	۹
۳	$a-1$	۲	۴	۵	۸	۸	
۴	۱	۲	۳	۳	۵	۷	۷

(۱) ۰٫۱۵ (۲) ۰٫۱
(۳) ۰٫۲ (۴) ۰٫۲۵

۱۲ اگر مساحت زیر نمودار چندبر فراوانی زیر ۱۰۰ باشد، آن‌گاه واریانس این داده‌ها کدام است؟



(۱) ۴۴ (۲) ۴۳٫۵
(۳) ۴۳ (۴) ۴۲٫۵

۱۳ سه داده‌ی آماری با میانگین ۶ مفروض است. اگر داده‌ی ۲ به آن‌ها اضافه شود، ضریب تغییرات ۴ داده‌ی موجود ۱٫۲ برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی می‌شود. مجموع مربعات ۳ داده‌ی اولیه کدام است؟

(۱) ۱۶۸ (۲) ۱۴۴ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۰۸

۱۴ هشتاد داده‌ی آماری در ۷ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. اگر ۲ داده‌ی جدید به این جدول افزوده شود فراوانی نسبی دسته‌ی وسط تغییر نمی‌کند. نسبت افزایش داده‌های دسته‌ی مذکور به فراوانی مطلق قبلی آن کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۱۵ داده‌های آماری ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۱, ۱۵, ۱۷, ۲۱, ۱۳ را با نمودار جعبه‌ای نشان می‌دهیم. واریانس داده‌های داخل جعبه تقریباً کدام است؟

(۱) ۴٫۵۹ (۲) ۴٫۹۵ (۳) ۵٫۲۴ (۴) ۵٫۷۱

۱۶ اگر میانگین و واریانس ۶ داده‌ی آماری به ترتیب ۱۲ و ۳ باشد و داده های (۸، ۱۰ و ۱۸) را به داده‌های قبلی اضافه کنیم، واریانس ۹ داده‌ی نهایی کدام است؟

(۱) $\frac{74}{9}$ (۲) صفر (۳) $\frac{80}{9}$ (۴) $\frac{25}{3}$

۱۷ میانگین و انحراف معیار ۲۲ داده‌ی آماری به ترتیب ۱۶ و ۲ می‌باشد، اگر داده‌های ۱۷ و ۲۰ و ۱۱، به آنان افزوده شوند، واریانس ۲۵ داده‌ی حاصل، کدام است؟

(۱) ۴٫۸ (۲) ۴٫۹ (۳) ۵٫۱ (۴) ۵٫۲

۱۸ داده‌های آماری در ۱۴ طبقه، دسته‌بندی شده‌اند. بازه‌ی دسته‌ی سوم به صورت $[48, 52)$ می‌باشد. اگر این داده‌ها در ۸ طبقه، دسته‌بندی شوند، کران بالای دسته‌ی چهارم کدام است؟

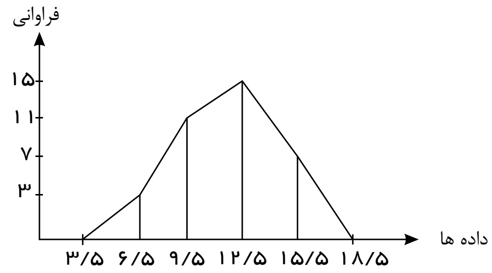
(۱) ۶۷ (۲) ۶۸ (۳) ۶۹ (۴) ۷۰

آمار و مدل سازی تجربی کل کتاب

۱۹ میانگین و اریانس ۲۹ داده‌ی آماری به ترتیب ۱۷ و ۵ می‌باشد. اگر داده‌های ۱۲ و ۱۳ و ۲۱ و ۲۲، از بین آنان حذف شوند، واریانس داده‌های باقیمانده، کدام است؟

(۱) ۲٫۵۲
(۲) ۲٫۵۴
(۳) ۲٫۶۴
(۴) ۲٫۶۶

۲۰ شکل زیر نمودار چندبر فراوانی تعدادی از داده‌های آماری پیوسته است که کوچک‌ترین آن‌ها ۵ است. مساحت سطح زیر نمودار کدام است؟



(۱) ۱۲۹
(۲) ۱۵۶
(۳) ۱۰۸
(۴) ۱۴۴

پاسخنامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ **۴** ابتدا جدول داده‌شده را با فراوانی مطلق می‌نویسیم:

مرکز دسته	۳۳	۳۷	۴۱	۴۵	۴۹
فراوانی مطلق	۷	۱۰	۱۵	۱۲	$a-۴۴$

برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۴۰ واحد کم می‌کنیم بنابراین از میانگین هم ۴۰ واحد کم می‌شود.

$$\bar{x}=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}F_i x_i \to ۱=\frac{۱}{a}((۷\times(-۷))+(۱۰\times(-۳))+(۱۵\times ۱)+(۱۲\times ۵)+((a-۴۴)\times ۹))$$

$$\to a=-۴۹-۳۰+۱۵+۶۰+۹a-۳۹۶\to ۸a=۴۰۰\to a=۵۰$$

دسته‌ی $[۳۹,۴۳)$ دسته‌ای است که مرکزش ۴۱ است.

$$d_i=\frac{۳۶۰}{N}\times F_i=\frac{۳۶۰}{۵۰}\times ۱۵=۱۰۸^\circ$$

سخت

۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\bar{x}=۱۵\Rightarrow \frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_۸}{۸}=۱۵\Rightarrow x_۱+x_۲+\cdots+x_۸=۱۲۰$$

$$\sigma^۲=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i-\bar{x})^۲=۴\Rightarrow \frac{۱}{۸}\left((x_۱-۱۵)^۲+(x_۲-۱۵)^۲+\cdots+(x_۸-۱۵)^۲\right)=۴$$

$$\Rightarrow (x_۱-۱۵)^۲+(x_۲-۱۵)^۲+\cdots+(x_۸-۱۵)^۲=۳۲$$

چون میانگین دو عدد ۱۲ و ۱۸ برابر ۱۵ است پس در ده داده‌ی حاصل میانگین تغییر نمی‌کند.

$$\sigma^۲_{\text{جدید}}=\frac{۱}{۱۰}(\underbrace{(x_۱-۱۵)^۲+(x_۲-۱۵)^۲+\cdots+(x_۸-۱۵)^۲}_{۳۲}+(۱۲-۱۵)^۲+(۱۸-۱۵)^۲)$$

$$=\frac{۱}{۱۰}(۳۲+۹+۹)=\frac{۵۰}{۱۰}=۵$$

سخت

۳ ۱ **۲** ۳ ۴ از داده‌ها ۱۲ واحد کم شده است بنابراین میانگین این داده‌ها را حساب کرده و سپس ۱۲ واحد به آن اضافه می‌کنیم.

$$\bar{x}=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}F_i x_i\to \bar{x}=\frac{۱}{۱۶}((۱\times(-۳))+(۳\times(-۲))+(۱\times(-۱))+(۳\times ۰)+(۶\times ۱)+(۲\times ۲))$$

$$\to \bar{x}=\frac{۱}{۱۶}(-۳-۶-۱+۶+۴)=۰\to \bar{x}_{\text{اولیه}}=۱۲$$

وقتی از داده‌ها ۱۲ واحد کم شود واریانس و انحراف معیار تغییری نمی‌کنند بنابراین واریانس را با همان میانگین صفر حساب می‌کنیم.

$$\sigma^۲=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}F_i(x_i-\bar{x})^۲$$

$$=\frac{۱}{۱۶}(۱(-۳-۰)^۲+۳(-۲-۰)^۲+۱(-۱-۰)^۲+۳(۰-۰)^۲+۶(۱-۰)^۲+۲(۲-۰)^۲)$$

$$=\frac{۱}{۱۶}(۹+۱۲+۱+۶+۸)=\frac{۳۶}{۱۶}\to\sigma=\sqrt{\frac{۳۶}{۱۶}}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}\to\sigma_{\text{اولیه}}=\frac{۳}{۲}$$

$$C_V=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{۱۲}=\frac{۳}{۲۴}=\frac{۱}{۸}$$

سخت

۴ ۱ ۲ **۳** ۴ در هر یک از دو طرف جعبه، $\frac{۱}{۴}$ داده‌ها یعنی ۹ داده قرار دارد و نصف داده‌ها یعنی ۱۸ داده نیز در داخل جعبه قرار دارد. میانگین داده‌های داخل جعبه را m در نظر می‌گیریم.

$$\text{مجموع کل داده‌ها}=\text{میانگین تمام داده‌ها}\times\text{تعداد داده‌ها}=۲۷/۵\times ۳۶=۹۹۰$$

از طرفی:

$$\text{مجموع کل داده‌ها}=(۹\times ۲۲)+(۱۸\times m)+(۹\times ۳۰)=۴۶۸+۱۸m\Rightarrow ۹۹۰=۴۶۸+۱۸m\Rightarrow m=\frac{۵۲۲}{۱۸}=۲۹$$

سخت

۵ ۱ **۲** ۳ ۴

مراکز دسته‌ها به ترتیب برابر ۱ و ۳ و ۵ و ۷ می‌باشد.

$$\bar{x}=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}F_i x_i=\frac{(۱\times ۲)+۳(n+۳)+(۵\times ۴)+۷(n-۱)}{۲+(n+۳)+۴+(n-۱)}\Rightarrow \bar{x}=\frac{۱۰n+۲۴}{۲n+۸}=\frac{۵n+۱۲}{n+۴}$$

$$۴\le \bar{x}<۶\Rightarrow ۴\le \frac{۵n+۱۲}{n+۴}<۶\xrightarrow{\times(n+۴)}۴n+۱۶\le ۵n+۱۲<۶n+۲۴$$

$$\begin{cases}۴n+۱۶\le ۵n+۱۲\to n\ge ۴\\ ۵n+۱۲<۶n+۲۴\to n>-۱۲ \quad \text{: همواره برقرار است}\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} n\ge ۴$$

بنابراین حداقل مقدار طبیعی n برابر ۴ می‌باشد.

سخت

۶ (۱) (۲) (۳) **(۴)** مجموع فراوانی‌های نسبی N داده‌ی آماری برابر یک می‌باشد.

$$۰/۱+۰/۲۵+۰/۲+\alpha=۱\to \alpha=۰/۴۵$$

میانگین داده ها را می توان از مجموع حاصلضرب فراوانی نسبی هر دسته در مرکز آن دسته بدست آورد.

$$\bar{x}=(۰/۱\times ۸)+(۰/۲۵\times ۱۲)+(۰/۲\times ۱۶)+(۰/۴۵\times ۲۰)=۱۶$$

$$\sigma^۲=\sum_{i=۱}^{N}f_i(x_i-\bar{x})^۲=۰/۱(۸-۱۶)^۲+۰/۲۵(۱۲-۱۶)^۲+۰/۲(۱۶-۱۶)^۲+۰/۴۵(۲۰-۱۶)^۲$$

$$=۶/۴+۴+۰+۷/۲=۱۷/۶$$

توجه کنید که واریانس را برحسب فراوانی نسبی بدین گونه بدست می‌آورند.

$$\sigma^۲=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}F_i(x_i-\bar{x})^۲=\frac{F_۱}{N}(x_۱-\bar{x})^۲+\frac{F_۲}{N}(x_۲-\bar{x})^۲+\cdots=f_۱(x_۱-\bar{x})^۲+f_۲(x_۲-\bar{x})^۲+\cdots$$

سخت

۷ (۱) (۲) **(۳)** (۴) با توجه به اینکه میانگین برابر ۱۶ می‌باشد داریم:

x_i	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
$x_i-\bar{x}$	-۴	-۲	۰	۲	۴
فراوانی مطلق	۵	۷	۱۰	a	۳

مجموع اختلاف داده ها از میانگین برابر صفر می‌باشد پس:

$$(۵\times(-۴))+(۷\times(-۲))+(۱۰\times ۰)+(a\times ۲)+(۳\times ۴)=۰\to -۲۰-۱۴+۲a+۱۲=۰\to a=۱۱$$

$$\sigma^۲=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}F_i(x_i-\bar{x})^۲$$

$$=\frac{۱}{۵+۷+۱۰+۱۱+۳}((۵\times ۱۶)+(۷\times ۴)+(۱۰\times ۰)+(۱۱\times ۴)+(۳\times ۱۶))=\frac{۱}{۳۶}(۲۰۰)=۵/۵۵$$

سخت

۸ **(۱)** (۲) (۳) (۴) با توجه به جدول داده شده، جدول فراوانی مطلق به صورت زیر است و توجه کنید اختلاف فراوانی تجمعی دو دسته‌ی iام و $(i+۱)$ام، فراوانی مطلق دسته‌ی $(i+۱)$ام را می‌دهد.

مرکز دسته	۲	۵	۸	۱۱	۱۴
فراوانی مطلق	۵	$y-۵$	$۱۸-y$	۳	$x-۲۱$

تعداد کل داده‌ها x می‌باشد (فراوانی تجمعی دسته‌ی آخر)

$$\text{زاویه‌ی مرکزی دسته‌ی آخر}=۹۰^\circ\to \frac{۳۶۰}{N}\times F_i=۹۰\to \frac{۳۶۰}{x}(x-۲۱)=۹۰\to \frac{۴(x-۲۱)}{x}=۱$$

$\to ۴x-۸۴=x\to ۳x=۸۴\to x=۲۸$ یعنی تعداد کل داده‌ها ۲۸ است.

$$\text{زاویه‌ی مرکزی دسته‌ی سوم}=۹۰^\circ\to \frac{۳۶۰}{N}\times F_i=۹۰\to \frac{۳۶۰}{۲۸}(۱۸-y)=۹۰$$

$$\to \frac{۱۸-y}{۷}=۱\to ۱۸-y=۷\to y=۱۱$$

$$\text{فراوانی مطلق دسته‌ی سوم}=۱۸-y=۱۸-۱۱=۷$$

سخت

۹ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

کمترین داده برابر ۱۰ و بیشترین داده برابر ۳۸ است.

$$R=Max-Min=۳۸-۱۰=۲۸ \quad \text{و} \quad C=\frac{R}{n}\to C=\frac{۲۸}{۷}=۴$$

بنابراین دسته‌بندی داده‌ها به این صورت می‌باشد

دسته ها	۱۰ − ۱۴	۱۴ − ۱۸	۱۸ − ۲۲	۲۲ − ۲۶	۲۶ − ۳۰	۳۰ − ۳۴	۳۴ − ۳۸
فراوانی مطلق	۴	۱	?	?	?	۳	۴
	۳۵ درصد داده ها				۵۵ درصد داده ها		

۵۵درصد داده‌ها بزرگتر مساوی ۲۶ هستند (یعنی ۱۱ تا از داده‌ها)($۱۱ = ۲۰ \times \frac{۵۵}{۱۰۰}$) پس داریم:

$$۴ + ۳ + \text{فراوانی مطلق دسته‌ی پنجم} = ۱۱ \rightarrow \text{فراوانی مطلق دسته‌ی پنجم} = ۴$$

چون در این دسته، داده‌های ۲۸ و ۲۸ و ۲۹ قرار دارند پس باید z نیز در این دسته باشد.

۳۵ درصد داده‌ها کمتر از ۲۲ هستند (یعنی ۷ تا از داده‌ها) ($۷ = ۲۰ \times \frac{۳۵}{۱۰۰}$)پس داریم:

$$۴ + ۱ + \text{فراوانی مطلق دسته‌ی سوم} = ۷ \rightarrow \text{فراوانی مطلق دسته‌ی سوم} = ۲$$

چون در این دسته، داده‌های ۱۸ و ۱۹ قرار دارند پس x, y در این دسته قرار ندارند و حتماً در دسته‌ی وسط قرار دارند.

سخت

۱۰ ۴ ۳ **۲** ۱ سه داده‌ی اولیه را $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ در نظر می‌گیریم.

$$\bar{x} = ۶ \rightarrow \frac{x_۱ + x_۲ + x_۳}{۳} = ۶ \rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۸$$

چهار داده‌ی جدید عبارتند از $x_۱$, $x_۲$, $x_۳$,۲.

$$\bar{x} = \frac{x_۱ + x_۲ + x_۳ + ۲}{۴} = \frac{۱۸ + ۲}{۴} = \frac{۲۰}{۴} = ۵$$

$$C_{V_{\text{جدید}}} = ۱٫۲ C_{V_{\text{قدیم}}} \rightarrow \frac{\sigma_{\text{جدید}}}{\bar{x}_{\text{جدید}}} = ۱٫۲ \frac{\sigma_{\text{قدیم}}}{\bar{x}_{\text{قدیم}}} \rightarrow \frac{\sigma_{\text{جدید}}}{۵} = ۱٫۲ \frac{\sigma_{\text{قدیم}}}{۶}$$

$$\rightarrow \sigma_{\text{جدید}} = \sigma_{\text{قدیم}} \rightarrow \sigma^۲_{\text{جدید}} = \sigma^۲_{\text{قدیم}} \rightarrow \frac{\sum_{i=۱}^{۴} x_i^۲}{۴} - (\bar{x}_{\text{جدید}})^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{۳} x_i^۲}{۳} - (\bar{x}_{\text{قدیم}})^۲$$

$$\rightarrow \frac{x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ + ۴}{۴} - ۲۵ = \frac{x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲}{۳} - ۳۶$$

$$\xrightarrow{x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ = A} \frac{A + ۴}{۴} = \frac{A}{۳} - ۱۱ \xrightarrow{\times ۱۲} ۳A + ۱۲ = ۴A - ۱۳۲ \rightarrow A = ۱۴۴$$

توجه کنید که $\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - (\bar{x})^۲$ است.

سخت

۱۱ ۴ ۳ **۲** ۱

می‌دانیم که در نمودار ساقه و برگ، داده‌ها را از کوچک به بزرگ می‌نویسیم.

$$\left.\begin{array}{l} \text{سطر اول}: ۳ \le a \le ۵ \\ \text{سطر دوم}: ۰ \le a - ۱ \le ۲ \rightarrow ۱ \le a \le ۳ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} a = ۳$$

با پیدا کردن a می‌توانیم طول دسته و از آنجا دسته‌ها را پیدا کنیم.

$$C = \frac{R}{n} = \frac{Max - Min}{n} \rightarrow C = \frac{۴۷ - ۲۲}{۵} = \frac{۲۵}{۵} = ۵$$

اکنون دسته‌ها را می‌نویسیم.

$[۲۲, ۲۷), [۲۷, ۳۲), [۳۲, ۳۷), [۳۷, ۴۲), [۴۲, ۴۷)$

دسته‌ی دوم یعنی $[۲۷, ۳۲)$ شامل دو داده‌ی ۲۸ و ۲۹ می‌باشد و تعداد کل داده‌ها ۲۰ است.

$$\text{فراوانی نسبی دسته‌ی دوم} = \frac{\text{فراوانی مطلق دسته‌ی دوم}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} = \frac{۲}{۲۰} = \frac{۱}{۱۰} = ۰٫۱$$

سخت

۱۲ ۴ ۳ **۲** ۱ مساحت زیرنمودار نمودار چندبر فراوانی برابر با مساحت نمودار مستطیلی است.

$$\text{مساحت زیرنمودار چندبر فراوانی} = N \cdot C \rightarrow ۱۰۰ = (۱ + ۶ + ۳ + ۴ + ۶)C \rightarrow ۱۰۰ = ۲۰C$$

$\rightarrow C = ۵ \rightarrow$

مرکز دسته‌ها	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵
فراوانی	۱	۶	۳	۴	۶

برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۱۵ واحد کم می‌کنیم که البته واریانس تغییر نمی‌کند (اگر به تمام داده‌های آماری مقداری ثابت را اضافه یا کم کنیم واریانس تغییر نمی‌کند)

مرکز دسته‌ها	-۱۰	-۵	۰	۵	۱۰
فراوانی	۱	۶	۳	۴	۶

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F_ix_i=\frac{1}{20}(-10-30+0+20+60)=\frac{40}{20}=2$$

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F_i(x_i-\bar{x})^2$$

$$=\frac{1}{20}\left(1(-10-2)^2+6(-5-2)^2+3(0-2)^2+4(5-2)^2+6(10-2)^2\right)=\frac{870}{20}=\frac{87}{2}=43/5$$

سخت

۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴

$$x_1,x_2,x_3\to\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=6\to x_1+x_2+x_3=18$$

اگر دادهی ۲ به این ۳ داده اضافه شود میانگین این ۴ داده برابر ۵ $=\frac{20}{4}$ میشود.

$$C_{V_{\text{جدید}}}=1/2C_{V_{\text{قدیم}}}\to\frac{\sigma_{\text{جدید}}}{5}=1/2\frac{\sigma_{\text{قدیم}}}{6}\to\sigma_{\text{جدید}}=\sigma_{\text{قدیم}}\to\sigma^2_{\text{جدید}}\to\sigma^2_{\text{قدیم}}$$

$$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+4}{4}-25=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}-36$$

با فرض $x_1^2+x_2^2+x_3^2=A$ داریم:

$$\frac{A+4}{4}-25=\frac{A}{3}-36\to\frac{A}{3}-\frac{A+4}{4}=11\xrightarrow{\times 12}4A-3A-12=132$$

$$\to A=144\to x_1^2+x_2^2+x_3^2=144$$

توجه کنید که واریانس از رابطهی $\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i^2}{N}-\bar{x}^2$ نیز محاسبه میشود.

سخت

۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$x=$ فراوانی مطلق دستهی وسط قبل از تغییر
$N=80=$ تعداد کل دادههای جامعه قبل از تغییر
$a=$ تعداد دادههای افزایش یافته در دستهی وسط
$N+20=100=$ تعداد کل دادههای جامعه بعد از تغییر

$\xrightarrow{\text{فراوانی نسبی}=\frac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{تعداد کل دادهها}}}$

$\frac{x}{80}=$ فراوانی نسبی دستهی وسط قبل از تغییر
$\frac{x+a}{100}=$ فراوانی نسبی دستهی وسط بعد از تغییر

در سوال گفته شده است که فراوانی نسبی دستهی وسط تغییر نکرده است و باید $\frac{a}{x}$ را پیدا کنیم

$$\frac{x}{80}=\frac{x+a}{100}\to 100x=80x+80a\to 20x=80a\to\frac{a}{x}=\frac{20}{80}=\frac{1}{4}$$

سخت

۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴ دادهها را از کوچک به بزرگ مرتب میکنیم.

$$7,9,10,11,12,12,\underbrace{13}_{\text{میانه}},16,17,17,18,20,21$$

چارک اول برابر $10/5=\frac{10+11}{2}$ و چارک سوم برابر $17/5=\frac{17+18}{2}$ است. بنابراین دادههای بین ۱۰٫۵ و ۱۷٫۵ داخل جعبه قرار میگیرند. یعنی:

$11,12,12,13,16,17,17$

$$\bar{x}=\frac{11+12+12+13+16+17+17}{7}=\frac{98}{7}=14$$

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2$$

$$=\frac{1}{7}\left((11-14)^2+(12-14)^2+(12-14)^2+(13-14)^2+(16-14)^2+(17-14)^2+(17-14)^2\right)$$

$$=\frac{1}{7}(9+4+4+1+9+9)=\frac{40}{7}\simeq 5/71$$

سخت

۱۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_6}{6}=12\Rightarrow x_1+x_2+\cdots+x_6=72\Rightarrow\frac{x_1+x_2+\cdots+x_6+8+10+18}{9}=\frac{72+36}{9}=12$$

میانگین دادههای جدید برابر ۱۲ است.

باتوجه به این که میانگین تغییری نکرده، از فرمول زیر برای محاسبهی واریانس بهره میبریم:

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2\to\frac{(x_1-12)^2+\cdots+(x_6-12)^2}{6}=3$$

$$\Rightarrow(x_1-12)^2+\cdots+(x_6-12)^2=18$$

$$\text{واریانس ۹ داده} = \frac{(x_1-۱۲)^۲+\cdots+(x_۶-۱۲)^۲+(۱۸-۱۲)^۲+(۱۰-۱۲)^۲+(۸-۱۲)^۲}{۹}$$

$$=\frac{۱۸+۳۶+۴+۱۶}{۹}=\frac{۷۴}{۹}$$

سخت

(۱۷) ①②③**④** ۲۲ داده‌ی آماری را به صورت : $x_1, x_۲, \cdots, x_{۲۲}$ در نظر می‌گیریم که میانگینشان برابر ۱۶ و واریانس آنها برابر ۴ است.

$$\sigma^۲=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i-\bar{x})^۲ \Rightarrow ۴=\frac{۱}{۲۲}((x_1-۱۶)^۲+(x_۲-۱۶)^۲+\cdots+(x_{۲۲}-۱۶)^۲)$$

$$\Rightarrow (x_1-۱۶)^۲+(x_۲-۱۶)^۲+\cdots+(x_{۲۲}-۱۶)^۲=۴\times ۲۲=۸۸$$

سه داده‌ی ۱۷ و ۲۰ و ۱۱ که به این ۲۲ داده اضافه می‌شوند میانگینشان برابر $۱۶=\frac{۴۸}{۳}=\frac{۱۱+۲۰+۱۷}{۳}$ است. بنابراین میانگین ۲۵ داده‌ی جدید همان ۱۶ است. اکنون واریانس ۲۵ داده‌ی جدید را حساب می‌کنیم.

$$\sigma^۲=\frac{۱}{۲۵}(\underbrace{(x_1-۱۶)^۲+(x_۲-۱۶)^۲+\cdots+(x_{۲۲}-۱۶)^۲}_{۸۸}+(۱۱-۱۶)^۲+(۲۰-۱۶)^۲+(۱۷-۱۶)^۲)$$

$$=\frac{۱}{۲۵}(۸۸+۲۵+۱۶+۱)=\frac{۱۳۰}{۲۵}=۵/۲$$

سخت

(۱۸) ①**②**③④ باتوجه به دسته‌ی سوم که به صورت $[۴۸,۵۲)$ است طول دسته بدست می‌آید: $C=۵۲-۴۸=۴$

اگر از کران پایین دسته‌ی سوم به اندازه‌ی دو تا طول دسته به عقب برویم کران پایین دسته‌ی اول بدست می‌آید.

$\text{کران پایین دسته‌ی اول} = \text{کران پایین دسته‌ی سوم} -۲C=۴۸-۸=۴۰\rightarrow Min$

اگر از کران بالای دسته‌ی سوم به اندازه‌ی یازده تا طول دسته به جلو برویم کران بالای دسته‌ی چهاردهم بدست می‌آید.

$\text{کران بالای دسته‌ی چهاردهم} = \text{کران بالای دسته‌ی سوم} +۱۱C=۵۲+۴۴=۹۶\rightarrow Max$

اکنون می‌خواهیم این داده‌ها را در ۸ طبقه دسته‌بندی کنیم پس داریم:

$$C_{\text{جدید}}=\frac{R}{n}\rightarrow C_{\text{جدید}}=\frac{Max-Min}{۸}=\frac{۹۶-۴۰}{۸}=\frac{۵۶}{۸}=۷$$

اکنون اگر به کمترین داده، ۴ تا طول دسته اضافه کنیم کران بالای دسته‌ی چهارم بدست می‌آید.

$\text{کران بالای دسته‌ی چهارم}=Min+۴C=۴۰+۴(۷)=۴۰+۲۸=۶۸$

سخت

(۱۹) **①**②③④ ۲۹ داده‌ی آماری را به صورت ۱۲, ۱۳, ۲۱, ۲۲ و $x_1, x_۲, \cdots, x_{۲۵}$ نشان می‌دهیم.

$$\sigma^۲=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i-\bar{x})^۲$$

$$\rightarrow ۵=\frac{۱}{۲۹}\left((x_1-۱۷)^۲+(x_۲-۱۷)^۲+\cdots+(x_{۲۵}-۱۷)^۲+(۱۲-۱۷)^۲+(۱۳-۱۷)^۲+(۲۱-۱۷)^۲+(۲۲-۱۷)^۲\right)$$

$$\rightarrow ۵\times ۲۹=(x_1-۱۷)^۲+(x_۲-۱۷)^۲+\cdots(x_{۲۵}-۱۷)^۲+۲۵+۱۶+۱۶+۲۵$$

$$\rightarrow (x_1-۱۷)^۲+(x_۲-۱۷)^۲+\cdots(x_{۲۵}-۱۷)^۲=۱۴۵-۸۲$$

$$\rightarrow (x_1-۱۷)^۲+(x_۲-۱۷)^۲+\cdots+(x_{۲۵}-۱۷)^۲=۶۳$$

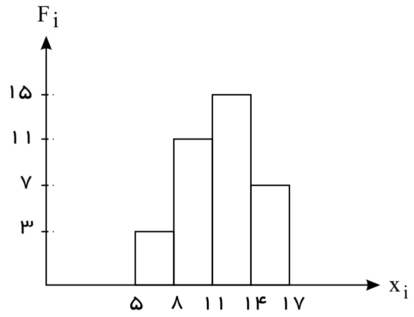
چون چهار داده‌ی حذف شده، میانگینشان ۱۷ است $(۱۷=\frac{۶۸}{۴}=\frac{۱۲+۱۳+۲۱+۲۲}{۴})$ بنابراین پس از حذفشان دوباره میانگین همان ۱۷ است. اکنون واریانس ۲۵ داده‌ی باقی‌مانده را حساب می‌کنیم.

$$\sigma^۲=\frac{۱}{۲۵}\left((x_1-۱۷)^۲+(x_۲-۱۷)^۲+\cdots(x_{۲۵}-۱۷)^۲\right)=\frac{۱}{۲۵}(۶۳)=\frac{۶۳}{۲۵}=۲/۵۲$$

سخت

(۲۰) ①②**③**④ مساحت سطح زیر نمودار چندبر فراوانی با مساحت نمودار مستطیلی برابر است:

x_i	حدود دسته‌ها	F_i
۶٫۵	[۵, ۸)	۳
۹٫۵	[۸, ۱۱)	۱۱
۱۲٫۵	[۱۱, ۱۴)	۱۵
۱۵٫۵	[۱۴, ۱۷]	۷



مساحت $= (۳ \times ۳) + (۳ \times ۱۱) + (۳ \times ۱۵) + (۳ \times ۷) = ۹ + ۳۳ + ۴۵ + ۲۱ = ۱۰۸$

سخت

پاسخ‌نامه کلیدی

سؤال	گزینه	سؤال	گزینه	سؤال	گزینه	سؤال	گزینه
۱	۴	۶	۴	۱۱	۲	۱۶	۱
۲	۴	۷	۳	۱۲	۲	۱۷	۴
۳	۲	۸	۱	۱۳	۲	۱۸	۲
۴	۳	۹	۱	۱۴	۳	۱۹	۱
۵	۲	۱۰	۲	۱۵	۴	۲۰	۳