نام و نام خانوادگی:

تعداد سوال: ۲۰

نام آزمون: ریاضی سوم تجربی کل کتاب

زمان برگزاری: ۲۰ دقیقه

افشار

مرکز مشاوره تحصیلی دکتر
علیرضا افشار

۱) تمام جواب‌های معادله‌ی $\tan^۲ x - \cos ۲x = ۱$ کدام است؟

(۱) $x = \frac{\pi}{۴} + k\pi$ (۲) $x = \frac{\pi}{۴} + ۲k\pi$ (۳) $x = \frac{\pi}{۴} + \frac{k\pi}{۲}$ (۴) $x = \frac{\pi}{۴} + \frac{k\pi}{۴}$

۲) حد عبارت $\frac{\cos x}{۱ - \sin x}$ وقتی $x \to (\frac{\pi}{۲})^+$، کدام است؟

(۱) $+\infty$ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) $-\infty$

۳) اگر $\tan(\alpha + ۲۰) = \frac{۱}{۴}$ باشد. $\cot(۲۵ - \alpha)$ کدام است؟

(۱) $\frac{۵}{۳}$ (۲) $\frac{۲}{۳}$ (۳) $\frac{۱}{۳}$ (۴) $\frac{۴}{۳}$

۴) چند تا از جفت توابع داده شده باهم مساوی هستند؟

۱) $\begin{cases} f(x) = |x|\sqrt{x^۲ - ۱} \\ g(x) = \sqrt{x^۴ - x^۲} \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-۱}} \\ g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-۱}} \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{۲-x}} \\ g(x) = \sqrt{\frac{x}{۲-x}} \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{|x|} \\ g(x) = \frac{|x|}{x} \end{cases}$

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵) مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x + ۲| + |x - ۵| < ۶$ کدام است؟

(۱) $\{x : |x| < ۱\}$ (۲) $\left\{x : -\frac{۱}{۲} < x < \frac{۳}{۲}\right\}$ (۳) $\varnothing$ (۴) $\left\{x : \frac{۱}{۲} < x < \frac{۵}{۲}\right\}$

۶) اگر $f(x) = \sqrt{۱ - x^۲}$ و $g = \{(-۳,۵), (-۱,۴), (۰,۷)\}$، آن‌گاه بیش‌ترین مقدار تابع $۲g \cdot (g - f)$ کدام است؟

(۱) ۳۲ (۲) ۶۴ (۳) ۸۴ (۴) ۴۲

۷) در چند نقطه از منحنی $x^۲ - xy + y^۲ = ۳$، خط مماس بر منحنی موازی محور xهاست؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۸) عرض از مبداء خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = Ln\frac{\sqrt{۴x + ۱}}{x^۲ - ۲x + ۳}$، در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟

(۱) $\frac{۵}{۹}$ (۲) $\frac{۸}{۹}$ (۳) $\frac{۵}{۳}$ (۴) $\frac{۱۰}{۳}$

۹) حد عبارت $x^۲\left(\sqrt{x^۴ + x + ۱} - \sqrt{x^۴ + x + ۵}\right)$ وقتی $x \to +\infty$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) -۴

۱۰) در ظرفی ۲ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی قرمز قراردارد. ۴ مرتبه مهره‌ای از ظرف خارج کرده و پس از مشاهده به ظرف برمی گردانیم. با چه احتمالی تعداد مهره‌های سفید و قرمز خارج شده از ظرف با هم برابر است؟

(۱) $\frac{۱۰۸}{۶۲۵}$ (۲) $\frac{۲۱۶}{۶۲۵}$ (۳) $\frac{۳۲۴}{۶۲۵}$ (۴) $\frac{۵۴}{۶۲۵}$

۱۱) تیراندازی ۳ تیر پرتاب می‌کند. اگر یک تیر به هدف اصابت کند، دو تاس و اگر دو تیر به هدف اصابت کند، ۳ تاس می‌اندازد. اگر احتمال برخورد تیر به هدف برابر $\frac{۱}{۴}$ باشد، با چه احتمالی عدد ظاهر شده‌ی فقط دو تاس مضرب ۳ است؟

۱) $\frac{۵}{۶۴}$ ۲) $\frac{۱۵}{۱۲۸}$ ۳) $\frac{۱۱}{۱۹۲}$ ۴) $\frac{۸۱}{۲۵۶}$

۱۲) اگر $|x-y|<|x|+|y|$، آن‌گاه عبارت $\frac{x}{|x|}-\frac{y}{|y|}$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۱۳) در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^۲}{x+۱}$، آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_۱=۴$ تا $x_۲=۷$، برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر آن در $x=a$ است. مقدار مثبت a کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}+۲$ ۲) $۲\sqrt{۱۰}-۱$ ۳) $۱+۲\sqrt{۱۰}$ ۴) $۵\sqrt{۲}-۱$

۱۴) سه تیر به سمت هدف شلیک می‌کنیم. اگر دو تیر به هدف اصابت کند دو تاس و اگر یک تیر به هدف اصابت کند سه تاس پرتاب می‌کنیم. اگر احتمال به هدف خوردن هر تیر $\frac{۱}{۳}$ باشد، با چه احتمالی مجموع اعداد تاس‌ها ۴ است؟

۱) $\frac{۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۲}{۸۱}$ ۴) $\frac{۱}{۲۴}$

۱۵) نقطه‌ی $A(۱,۰)$، روی دایره‌ی مثلثاتی به اندازه‌ی $\frac{۱۳\pi}{۴}$ رادیان در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌کند تا به نقطه‌ی A' برسد. مجموع طول و عرض نقطه‌ی A' کدام است؟

۱) صفر ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $-\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۱۶) معادله‌ی خط مماس بر تابع $y=x^۳-۵x^۲+۷x+۱$ در $x=۱$ واقع بر منحنی، وتری با چه طول روی سهمی $y=x^۲-۵x+۶$ جدا می‌کند؟

۱) $\sqrt{۱۷}$ ۲) $\sqrt{۱۳}$ ۳) $\sqrt{۱۱}$ ۴) $\sqrt{۱۹}$

۱۷) اگر n عددی طبیعی باشد، مجموعه جواب معادله‌ی $\left[\sqrt{۴n^۲+۲n+۱}\right]=[۲x+۱]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $[n+\frac{۱}{۲},n+۱)$ ۲) $[n-\frac{۱}{۲},n]$ ۳) $(۲n,۲n+۱)$ ۴) $[n-\frac{۱}{۲},n)$

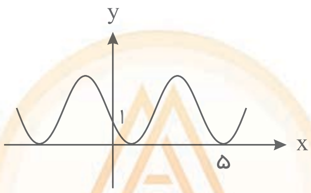
۱۸) در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{ax+b\sqrt{x^۲+۳}}{x^۲-۳x+۲}$، اگر $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۲$ باشد، آن‌گاه حد تابع $g(x)=xf(x)$ وقتی $x\to-\infty$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸- ۳) ۸ ۴) ۴-

۱۹) حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\frac{\cos^۳ x}{|\sin ۲x-۲\cos x|}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $-\infty$

۲۰) قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a-\cos(\pi(\frac{۱}{۲}+bx))$ به صورت زیر است. $a+b$ کدام است؟



۱) صفر ۲) ۱٫۵ ۳) ۱ ۴) ۰٫۵

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ⓵ ⓶ ❸ ⓸ می‌دانیم: $\boxed{\tan^۲ a = \dfrac{۱-\cos ۲a}{۱+\cos ۲a}}$

$$\tan^۲ x - \cos ۲x = ۱ \to \frac{۱-\cos ۲x}{۱+\cos ۲x} = ۱ + \cos ۲x \to (۱+\cos ۲x)^۲ = ۱ - \cos ۲x$$

$$\to ۱ + ۲\cos ۲x + \cos^۲ ۲x = ۱ - \cos ۲x \to \cos^۲ ۲x + ۳\cos ۲x = ۰ \to \cos ۲x(\cos ۲x + ۳) = ۰$$

$$\cos ۲x = ۰ \xrightarrow[x=k\pi+\frac{\pi}{۲}]{\text{حالت خاص}} ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \to x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$$

$$\cos ۲x + ۳ = ۰ \to \cos ۲x = -۳ \ \text{غ ق ق} \ (-۱ \leq \cos x \leq ۱)$$

سخت

۲ ⓵ ⓶ ⓷ ❹

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} \frac{\cos x}{(۱-\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} \frac{\cos x(۱+\sin x)}{۱-\sin^۲ x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} \frac{۱+\sin x}{\cos x} = \frac{۲}{۰^-} = -\infty$$

سخت

۳ ❶ ⓶ ⓷ ⓸

می دانیم: $\boxed{\tan(\dfrac{\pi}{۴} - \alpha) = \dfrac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha}}$

$$\tan(\alpha + ۲۰) = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \tan(۲۵ - \alpha) = \tan(\frac{\pi}{۴} - (\alpha + ۲۰)) = \frac{۱-\tan(\alpha+۲۰)}{۱+\tan(\alpha+۲۰)}$$

$$= \frac{۱-\frac{۱}{۴}}{۱+\frac{۱}{۴}} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \cot(۲۵ - \alpha) = \frac{۵}{۳}$$

سخت

۴ ⓵ ❷ ⓷ ⓸ برای این‌که دو تابع باهم مساوی باشند اولاً باید دامنه‌ی آن‌ها برابر باشد ثانیاً ضابطه‌ی آن‌ها باید برابر باشد.

$$۱ - \begin{cases} f(x) = |x|\sqrt{x^۲ - ۱} \\ g(x) = \sqrt{x^۴ - x^۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_f : x^۲ - ۱ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \geq ۱ \Rightarrow x \geq ۱, x \leq -۱ \\ D_g : x^۴ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲(x^۲ - ۱) \geq ۰ \Rightarrow D_g : (-\infty, -۱] \cup x = ۰ \cup [۱, +\infty) \end{cases}$$

$D_f \neq D_g \Rightarrow$ باهم برابر نیستند.

$$۲ - \begin{cases} f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-۱}} \\ g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-۱}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_f : \dfrac{x}{x-۱} \geq ۰ \Rightarrow D_f : (-\infty, ۰] \cup (۱, +\infty) \\ D_g : \begin{cases} x \geq ۰ \\ x - ۱ > ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > ۱ \end{cases}$$

$\Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow$ توابع باهم مساوی نیستند.

$$۳ - \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{۲-x}} \\ g(x) = \sqrt{\frac{x}{۲-x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_f : \begin{cases} x \geq ۰ \\ ۲ - x > ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} ۰ \leq x < ۲ \\ D_g : \dfrac{x}{۲-x} \geq ۰ \Rightarrow D_g : [۰, ۲) \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g$$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{۲-x}} = \sqrt{\dfrac{x}{۲-x}} = g(x) \to$ باتوجه به یکی بودن دامنه‌ها، دو تابع برابر هستند

$$۴ - \begin{cases} f(x) = \frac{x}{|x|} \\ g(x) = \frac{|x|}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \{۰\} \\ D_g = \mathbb{R} - \{۰\} \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g$$

$$x > ۰ \to f(x) = \frac{x}{x}, \ g(x) = \frac{x}{x}$$

$$x < ۰ \to f(x) = \frac{x}{-x}, \ g(x) = \frac{x}{-x}$$

$\to$ باتوجه به یکی بودن دامنه‌ها، دو تابع برابر هستند

پس دو جفت از این توابع مساوی هستند.

سخت

۵ ۴ **❸** ۲ ۱ روش اول:

ابتدا داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$		-۲		۵		$+\infty$
$x+۲$		$-$	۰	$+$		$+$	
$x-۵$		$-$		$-$	۰	$+$	

$$x<-۲: -x-۲-x+۵<۶\to -۲x<۳\to x>-\frac{۳}{۲}\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}}\varnothing$$

$$-۲\le x\le ۵: x+۲-x+۵<۶\to ۷<۶ \text{ امکان ندارد} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}}\varnothing$$

$$x>۵: x+۲+x-۵<۶\to ۲x<۹\to x<\frac{۹}{۲}\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}}\varnothing$$

بنابراین مجموعه‌ی جواب این نامعادله، تهی می‌باشد.

روش دوم:

واضح است که $|x-۵|=|۵-x|$ و می دانیم طبق نامساوی مثلثی $|a+b|\le|a|+|b|$

پس: $|x+۲|+|۵-x|\ge|x+۲+۵-x|\to|x+۲|+|۵-x|\ge ۷$

پس امکان ندارد که $|x+۲|+|۵-x|<۶$ باشد بنابراین این نامعادله جواب ندارد.

سخت

۶ ۴ **❸** ۲ ۱

$$D_f: ۱-x^۲\ge ۰ \Rightarrow x^۲\le ۱ \Rightarrow -۱\le x\le ۱,\ D_g=\{-۳,-۱,۰\}$$

کاملاً مشخص است که دامنه‌ی $(g-f)\cdot ۲g$ برابر است با: $D_f\cap D_g$ یعنی $D_f\cap D_g=\{-۱,۰\}$

$$\left.\begin{array}{l}((g-f)\cdot ۲g)(-۱)=(g(-۱)-f(-۱))\cdot ۲g(-۱)=(۴-۰)\times ۲(۴)=۳۲\\((g-f)\cdot ۲g)(۰)=(g(۰)-f(۰))\cdot ۲g(۰)=(۷-۱)\times ۲(۷)=۸۴\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow (g-f)\cdot ۲g=\{(-۱,۳۲),(۰,۸۴)\}\Rightarrow$ بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۸۴ است.

سخت

۷ ۴ **❸** ۲ ۱ چون خط مماس باید موازی محور xها باشد، پس مشتق صفر است.

$$\Rightarrow f(x,y)=x^۲-xy+y^۲-۳=۰\Rightarrow y'=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۲x-y}{-x+۲y}=۰\Rightarrow ۲x=y$$

پس در هر نقطه از منحنی که y برابر $۲x$ است، خط مماس افقی است. حال در منحنی به جای yها، $۲x$ قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow x^۲-x(۲x)+(۲x)^۲=۳\Rightarrow x^۲-۲x^۲+۴x^۲=۳$$

$$\Rightarrow ۳x^۲=۳\Rightarrow x=\pm ۱\Rightarrow y=\pm ۲ \text{ دو نقطه}\Rightarrow A\left|\begin{array}{l}۱\\۲\end{array}\right.,\quad A'\left|\begin{array}{l}-۱\\-۲\end{array}\right.$$

سخت

۸ ۴ ۳ **❷** ۱ می‌دانیم: $\boxed{y=Ln\,u\to y'=\frac{u'}{u}}$

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم و سپس مشتق می گیریم:

$$y=Ln\frac{\sqrt{۴x+۱}}{x^۲-۲x+۳}\to y=Ln\sqrt{۴x+۱}-Ln(x^۲-۲x+۳)\to y=\frac{۱}{۲}Ln(۴x+۱)-Ln(x^۲-۲x+۳)$$

$$۱)\ x=۲\to y=Ln\frac{۳}{۳}=Ln۱=۰\ \to A\left|\begin{array}{l}۲\\۰\end{array}\right.$$

$$۲)\ y'=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۴x+۱}-\frac{۲x-۲}{x^۲-۲x+۳}\xrightarrow{x=۲} m_{\text{مماس}}=\frac{۴}{۱۸}-\frac{۲}{۳}=-\frac{۸}{۱۸}=-\frac{۴}{۹}$$

$$۳)\ y-۰=-\frac{۴}{۹}(x-۲)\xrightarrow{x=۰} y=\frac{۸}{۹}$$

سخت

۹ ۴ ۳ **❷** ۱ حد داده شده مبهم از نوع $\infty-\infty$+ است و چون بزرگترین توان زیر رادیکال با فرجه برابر نیست از هم ارزی واندروالسی نمی‌توان استفاده کرد و چون فرجه‌ی رادیکال‌ها زوج است بنابراین عبارت را در مزدوجش ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}x^۲\left(\sqrt{x^۴+x+۱}-\sqrt{x^۴+x+۵}\right)\left(\frac{\left(\sqrt{x^۴+x+۱}+\sqrt{x^۴+x+۵}\right)}{\left(\sqrt{x^۴+x+۱}+\sqrt{x^۴+x+۵}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^۲\left(\frac{x^۴+x+۱-\left(x^۴+x+۵\right)}{\sqrt{x^۴+x+۱}+\sqrt{x^۴+x+۵}}\right)\overset{\text{پرتوان}}{=}\lim_{x\to+\infty}x^۲\left(\frac{-۴}{\sqrt{x^۴}+\sqrt{x^۴}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-۴x^۲}{۲x^۲}\right)=-۲$$

سخت

۱۰ ۴ ۳ **❷** ۱ یعنی ۲ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی قرمز خارج شوند $\frac{۳}{۵}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۲}{۵}$ و چون مهره‌ها را با جایگزینی خارج می‌کنیم جابجائی آنها نیز مهم است یعنی ($WWRR$) پس احتمال مطلوب است برابر است با: $\frac{۴!}{۲!۲!}$

$$\frac{۲}{۵}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۴!}{۲!۲!}=\frac{۴\times۹\times۴!}{۵^۴\times۴}=\frac{۲۱۶}{۶۲۵}$$

سخت

۱۱) (۴) (۳) (۲) **(۱)** با توجه به فرمول $\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(۱-p)^{n-k}$ داریم:

$$\text{یک تیر از سه تیر به هدف اصابت کند}\xrightarrow{n=۳\ ,\ k=۱\ ,\ p=\frac{۱}{۴}}\binom{۳}{۱}\cdot\left(\frac{۱}{۴}\right)^۱\cdot\left(\frac{۳}{۴}\right)^۲=\frac{۲۷}{۶۴}$$

$$\xrightarrow[n=۲\ ,\ k=۲\ ,\ p=\frac{۱}{۳}]{\text{دو تاس از دو تاس پرتاب شده مضرب سه باشد}}\binom{۲}{۲}\cdot\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲\cdot\left(\frac{۲}{۳}\right)^۰=\frac{۱}{۹}$$

$$\text{دو تیر از سه تیر به هدف اصابت کند}\xrightarrow{n=۳\ ,\ k=۲\ ,\ p=\frac{۱}{۴}}\binom{۳}{۲}\cdot\left(\frac{۱}{۴}\right)^۲\cdot\left(\frac{۳}{۴}\right)^۱=\frac{۹}{۶۴}$$

$$\xrightarrow[n=۳\ ,\ k=۲\ ,\ p=\frac{۱}{۳}]{\text{دو تاس از سه تاس پرتاب شده مضرب سه باشد}}\binom{۳}{۲}\cdot\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲\cdot\left(\frac{۲}{۳}\right)^۱=\frac{۲}{۹}$$

$$\text{احتمال مطلوب}=\left(\frac{۲۷}{۶۴}\times\frac{۱}{۹}\right)+\left(\frac{۹}{۶۴}\times\frac{۲}{۹}\right)=\frac{۴۵}{۹\times۶۴}=\frac{۵}{۶۴}$$

سخت

۱۲) (۴) (۳) (۲) **(۱)** طبق نامساوی مثلثی، اگر $|a+b|<|a|+|b|$ باشد آن‌گاه $ab<۰$ است.

$$|x-y|<|x|+|y|\to|x+(-y)|<|x|+|-y|\to x(-y)<۰\to xy>۰$$

یعنی x, y هم‌علامت هستند.

$$x>۰, y>۰\to\frac{x}{|x|}-\frac{y}{|y|}=\frac{x}{x}-\frac{y}{y}=۱-۱=۰$$

$$x<۰, y<۰\to\frac{x}{|x|}-\frac{y}{|y|}=\frac{x}{-x}-\frac{y}{-y}=-۱+۱=۰$$

بنابراین عبارت داده شده فقط می‌تواند صفر باشد.

سخت

۱۳) (۴) (۳) **(۲)** (۱)

$$\text{آهنگ متوسط از ۴ تا ۷}=\frac{f(۷)-f(۴)}{۷-۴}=\frac{\frac{۴۹}{۸}-\frac{۱۶}{۵}}{۳}=\frac{۱۱۷}{۱۲۰}=\frac{۳۹}{۴۰}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای (مشتق)}=\frac{۲x(x+۱)-۱(x^۲)}{(x+۱)^۲}=\frac{x^۲+۲x}{(x+۱)^۲}\overset{x=a}{=\!=}\frac{a^۲+۲a}{(a+۱)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{آهنگ متوسط = آهنگ لحظه‌ای}}\frac{a^۲+۲a}{(a+۱)^۲}=\frac{۳۹}{۴۰}\to\frac{\overbrace{a^۲+۲a+۱}^{(a+۱)^۲}-۱}{(a+۱)^۲}=\frac{۳۹}{۴۰}\to۱-\frac{۱}{(a+۱)^۲}=۱-\frac{۱}{۴۰}$$

$$\to(a+۱)^۲=۴۰\to a+۱=\pm\sqrt{۴۰}\to a+۱=\pm۲\sqrt{۱۰}\to a=-۱+۲\sqrt{۱۰}\ ,\ a=-۱-۲\sqrt{۱۰}\ \text{غیر قابل قبول}$$

سخت

۱۴) (۴) **(۳)** (۲) (۱)

$$\text{دو تیر به هدف برخورد کند}\xrightarrow[n=۳,k=۲,p=\frac{۱}{۳}]{\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(۱-p)^{n-k}}\binom{۳}{۲}\cdot\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲\cdot\left(\frac{۲}{۳}\right)^۱\xrightarrow[\text{مجموع ۴ :}\quad(۱,۳),\ (۳,۱),\ (۲,۲)]{\text{دو تاس پرتاب می‌کنیم}}\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

$$\text{یک تیر به هدف برخورد کند}\xrightarrow[n=۳,k=۱,p=\frac{۱}{۳}]{\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(۱-p)^{n-k}}\binom{۳}{۱}\cdot\left(\frac{۱}{۳}\right)^۱\cdot\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲\xrightarrow[\text{مجموع ۴ :}\quad(۱,۱,۲),\ (۱,۲,۱),\ (۲,۱,۱)]{\text{سه تاس پرتاب می‌کنیم}}\frac{۳}{۲۱۶}=\frac{۱}{۷۲}$$

$$\text{احتمال مطلوب}=\binom{۳}{۲}\cdot\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲\cdot\left(\frac{۲}{۳}\right)^۱\times\frac{۱}{۱۲}+\binom{۳}{۱}\cdot\left(\frac{۱}{۳}\right)^۱\cdot\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲\times\frac{۱}{۷۲}$$

$$=(۳)\left(\frac{۱}{۹}\right)\left(\frac{۲}{۳}\right)\left(\frac{۱}{۱۲}\right)+(۳)\left(\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{۴}{۹}\right)\left(\frac{۱}{۷۲}\right)=\frac{۱}{۵۴}+\frac{۱}{۱۶۲}=\frac{۴}{۱۶۲}=\frac{۲}{۸۱}$$

سخت

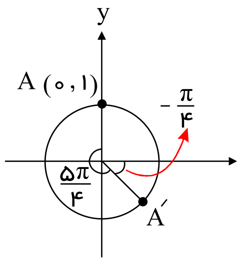
۱۵) (۴) (۳) (۲) **(۱)** اگر دوران در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، علامت زاویه مثبت است، پس زاویه‌ی دوران برابر است با:

$$\frac{۱۳\pi}{۴}=۲\pi+\frac{۵\pi}{۴}$$

با دوران به اندازه‌ی ۲π، نقطه‌ی A به موقعیت اولیه‌ی خود باز می‌گردد، پس کافیست نقطه‌ی A را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه‌ی $\frac{۵\pi}{۴}=\pi+\frac{\pi}{۴}$ دوران دهیم تا نقطه

ی A' به دست آید.

مطابق شکل داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} x_{A'}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ y_{A'}=\sin(-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \Rightarrow x_{A'}+y_{A'}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

سخت

۱۶) ۴ ۳ ۲ **۱** ابتدا معادله‌ی خط مماس را می‌نویسیم.

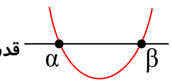
$$1)\ x=1 \xrightarrow{\text{تابع}} y=1-5+7+1=4 \to A\Big|\begin{matrix}1\\4\end{matrix}$$

$$2)\ y'=3x^2-10x+7 \to m_{\text{مماس}}=3-10+7=0$$

$$3)\ y-4=0(x-1) \to y=4 :\ \text{معادله‌ی خط مماس}$$

اکنون برای محاسبه‌ی طول وتری که خط $y=4$ روی سهمی داده شده ایجاد می‌کند باید معادله‌ی تلاقی را تشکیل دهیم.

$$x^2-5x+6=4 \to x^2-5x+2=0 :\ \text{معادله‌ی تلاقی}$$

دقت کنید که طول وتر ایجاد شده  قدر مطلق تفاضل ریشه‌های معادله‌ی تلاقی است.

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|1|}=\sqrt{25-8}=\sqrt{17}$$

سخت

۱۷) **۴** ۳ ۲ ۱ روش اول:

می‌دانیم: $\boxed{[x]=n, n\in\mathbb{Z}\to n\le x<n+1}$

ابتدا حاصل $\left[\sqrt{4n^2+2n+1}\right]$ را می‌یابیم. برای این کار عبارت زیر رادیکال را باید بین دو مربع کامل بنویسیم.

$$4n^2<4n^2+2n+1<4n^2+4n+1 \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{4n^2}<\sqrt{4n^2+2n+1}<\underbrace{\sqrt{4n^2+4n+1}}_{(2n+1)^2}$$

$$|2n|<\sqrt{4n^2+2n+1}<|2n+1| \xrightarrow{n\in N} \underbrace{2n}<\sqrt{4n^2+2n+1}<\underbrace{2n+1} \Rightarrow \left[\sqrt{4n^2+2n+1}\right]=2n(*)$$

دو عدد صحیح متوالی

بنابراین داریم:

$$[2x+1]=\left[\sqrt{4n^2+2n+1}\right]\xrightarrow{(*)}[2x+1]=2n\Rightarrow[2x]+1=2n\Rightarrow[2x]=\underbrace{2n-1}_{\in\mathbb{Z}}$$

$$\to 2x-1\le 2x<2n-1+1\to 2n-1\le 2x<2n\xrightarrow{\div 2}n-\frac{1}{2}\le x<n\to x\in[n-\frac{1}{2},n)$$

روش دوم:

به ازای یک n دلخواه، مثلا $n=1$ معادله را حل می‌کنیم.

$$[2x+1]=\underbrace{[\sqrt{7}]}_{2,000}\Rightarrow[2x+1]=2\Rightarrow 2\le 2x+1<3\to 1\le 2x<2\Rightarrow\frac{1}{2}\le x<1\Rightarrow x\in[1-\frac{1}{2},1)$$

با مقایسه‌ی بازه‌ی به دست آمده با گزینه‌ها، گزینه‌ی «۴» را به عنوان پاسخ انتخاب می‌کنیم.

سخت

۱۸) **۴** ۳ ۲ ۱

$$\lim_{x\to1}\frac{ax+b\sqrt{x^2+3}}{x^2-3x+2}=\frac{a+2b}{0}\xrightarrow{\text{چون جواب حد عدد شده است بنابراین}}a+2b=0\to a=-2b$$

این کسر حتما $\frac{0}{0}$ بوده است

$$\lim_{x\to1}\frac{ax+b\sqrt{x^۲+۳}}{x^۲-۳x+۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to1}\frac{a+b\frac{۱(۲x)}{۲\sqrt{x^۲+۳}}}{۲x-۳}=\frac{a+\frac{b}{۲}}{-۱}$$

$$=-a-\frac{b}{۲}=۲b-\frac{b}{۲}=\frac{۳b}{۲}=۲\to b=\frac{۴}{۳}\quad,\quad a=-\frac{۸}{۳}$$

$$\lim_{x\to-\infty}xf(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^۲+bx\sqrt{x^۲+۳}}{x^۲-۳x+۲}\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^۲+bx|\overbrace{x}^{-}|}{x^۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^۲-bx^۲}{x^۲}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-b)x^۲}{x^۲}=a-b=\frac{-۸}{۳}-\frac{۴}{۳}=\frac{-۱۲}{۳}=-۴$$

سخت

۱۹ ۱ ۲ **۳** ۴ می‌دانیم: $\boxed{\sin ۲a=۲\sin a\cos a}$

ابتدا باید مشخص کنیم که داخل قدر مطلق چه علامتی دارد.

$$|\sin ۲x-۲\cos x|=|۲\sin x\cos x-۲\cos x|=|۲\cos x(\sin x-۱)|$$

وقتی $x\to(\frac{\pi}{۲})^-$ یعنی x در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی است و در این ناحیه، کسینوس مثبت است و $\sin(\frac{\pi}{۲})^-=۱^-$ است. بنابراین $\sin x-۱$ مقداری منفی است در نتیجه داخل قدر مطلق، منفی است.

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\frac{\cos^۳x}{-۲\cos x(\sin x-۱)}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\frac{\cos^۲x}{-۲(\sin x-۱)}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\frac{۱-\sin^۲x}{-۲(\sin x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\frac{(۱+\sin x)(۱-\sin x)}{۲(۱-\sin x)}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\frac{۱+\sin x}{۲}=\frac{۱+۱}{۲}=۱$$

سخت

۲۰ ۱ ۲ ۳ **۴** ابتدا ضابطه‌ی تابع را ساده‌تر کنیم:

$$f(x)=a-\cos(\frac{\pi}{۲}+b\pi x)=a+\sin b\pi x$$

با توجه به نمودار، نقطه‌ی $(۰,۱)$ روی نمودار قرار دارد:

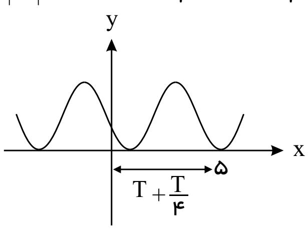
$$f(۰)=۱\Rightarrow a+\sin ۰=۱\Rightarrow a=۱$$

از طرفی مطابق شکل زیر، دوره‌ی تناوب تابع را می‌یابیم:

$$T+\frac{T}{۴}=۵\Rightarrow\frac{۵}{۴}T=۵\Rightarrow T=۴$$

دوره تناوب تابع $y=\sin ax$ از رابطهٔ $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ بدست می آید.

$$\frac{۲\pi}{|b\pi|}=۴\Rightarrow|b|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}$$



چون بلافاصله بعد از محور yها نمودار در حال کاهش است، پس $b=-\frac{۱}{۲}$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow a+b=۱+(-\frac{۱}{۲})=۰/۵$$

سخت

پاسخ‌نامه کلیدی

سؤال	گزینه صحیح
۱	۳
۲	۴
۳	۱
۴	۲
۵	۳
۶	۳
۷	۳
۸	۲
۹	۲
۱۰	۲
۱۱	۱
۱۲	۱
۱۳	۲
۱۴	۳
۱۵	۱
۱۶	۱
۱۷	۴
۱۸	۴
۱۹	۳
۲۰	۴