



نام و نام خانوادگی:

تعداد سوال: ۳۰

افشار

نام آزمون: ریاضی دوم تجربی کل کتاب

زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه

مرکز مشاوره تحصیلی دکتر
علیرضا افشار۱) چند جمله از دنباله‌ی حسابی $a_1 = 70$ و $a_7 = 61$ بزرگ تر از ۳ می باشند؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

۲) چند جمله از یک دنباله‌ی حسابی که در آن $a_1 = 96$ و $a_7 = 100$ است کوچک تر از ۱۵۸ هستند؟

۱۹ (۴)

۱۸ (۳)

۱۷ (۲)

۱۶ (۱)

۳) اگر در یک دنباله‌ی حسابی بدانیم مجموع پنج جمله‌ی اولیه‌ی مرتبه‌ی زوج برابر ۶۰ و مجموع پنج جمله‌ی اولیه‌ی مرتبه‌ی فرد برابر ۳۰ باشد قدرنسبت کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۴) اگر انتهای کمان α در ناحیه‌ی اول باشد عبارت $\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$ برابر کدام است؟ $\cot \alpha$ (۴) $\tan \alpha$ (۳) $-\cot \alpha$ (۲) $-\tan \alpha$ (۱)۵) اگر $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = 4$ باشد حاصل $\tan^2 x + \cot^2 x$ کدام است؟ $\frac{10}{3}$ (۴) $\frac{17}{4}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۲)

۲ (۱)

۶) اگر $\tan(\alpha + 20^\circ) = \frac{1}{4}$ باشد. $\cot(25^\circ - \alpha)$ کدام است؟ $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۱)۷) اگر $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$ باشد حاصل $\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}$ چقدر است؟ $\frac{18}{7}$ (۴) $\sqrt{\frac{32}{7}}$ (۳) $\sqrt{\frac{18}{7}}$ (۲) $\sqrt{\frac{50}{7}}$ (۱)

۸) در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی دوم، دو برابر جمله‌ی پنجم و جمله‌ی هشتم می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند، بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آنها است؟

 $7 + 4\sqrt{3}$ (۴) $5 + 4\sqrt{3}$ (۳) $5 + 2\sqrt{3}$ (۲) $2 + \sqrt{3}$ (۱)۹) اگر $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$ باشد $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟ $\frac{\sqrt{2}}{5}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{5}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ (۱)۱۰) اگر حاصل ضرب جواب‌های معادله‌ی $\frac{x}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} = \frac{a}{x^2-4}$ برابر $-\frac{3}{2}$ باشد، قدر مطلق تفاضل جواب‌های معادله کدام است؟ $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲)

۱ (۱)



۱۱) اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد در ماتریس A^{100} مجموع درایه‌ها کدام است؟

- ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

۱۲) حاصل $A = \frac{1}{\sin 15} + \frac{\sqrt{3}}{\cos 15}$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $8\sqrt{2}$

۱۳) اگر $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{9}{10!} = 1 - \frac{1}{n!}$ باشد در این صورت $n^2 + 1$ کدام است؟

- ۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۱ ۳) ۱۰۲ ۴) ۱۰۳

۱۴) اگر $\frac{(n-1)!}{n^2 - 3n + 2} = 720 \times 42 \times 120$ باشد آن‌گاه مقدار n کدام است؟

- ۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۱۵) در یک دنباله هندسی نزولی، مجموع مجزورات تمام جملات، برابر $\frac{2}{3}$ مجذور مجموع تمام جملات آن است. قدر نسبت این دنباله، کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۱۶) اگر $x = 2$ یکی از جواب‌های معادله $\frac{5-m}{2x} + \frac{m-3}{x(x+4)} = \frac{x}{x^2+3x-4}$ باشد، آن‌گاه جواب دیگر کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۵ ۴) -۵

۱۷) چند عدد سه رقمی زوج وجود دارد که فقط شامل دو رقم متمایز باشد؟

- ۱) ۱۰۸ ۲) ۱۱۸ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۲۳

۱۸) اگر مجموعه مقادیری از x که به ازای آن، مقدار تابع $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + k}{x^2 - 4x + 5}$ کم‌تر از یک است، به صورت $(m, 1)$ باشد، حداقل مقدار m کدام است؟

- ۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۱

۱۹) اگر مجموع جواب‌های حقیقی معادله $\frac{ax}{x^2+x-2} + \frac{2x-1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{-x-2}$ برابر ۲ باشد، مقدار عبارت سمت راست تساوی فوق به‌ازای $x = a$ کدام است؟

- ۱) -۲ ۲) -۱ ۳) -۳ ۴) ۱

۲۰) اگر $\frac{1+\tan x}{1-\tan x} = \frac{m-2}{m+1}$ و $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$ آن‌گاه حداقل مقدار عبارت $y = (m-1)^2$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{4}$



پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

در دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a_1 و قدر نسبت d ، جمله‌ی n ام از رابطه‌ی $a_n = a_1 + (n-1)d$ بدست می‌آید.

$$a_7 - a_1 = d \Rightarrow 61 - 70 = -9$$

$$a_n > 3 \Rightarrow a_1 + (n-1)d > 0 \Rightarrow 70 + (n-1)(-9) > 3 \Rightarrow -9n > -76 \Rightarrow n < \frac{76}{9} \Rightarrow n < 8,44 \Rightarrow n \leq 8$$

در این نامساوی ۸ عدد طبیعی ۱ تا ۸ صدق می‌کند.

سخت

۱ ۲ ۳ ۴ ۲

در دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a_1 و قدر نسبت d ، جمله‌ی n ام از رابطه‌ی $a_n = a_1 + (n-1)d$ بدست می‌آید.

$$d = a_7 - a_1 = 100 - 96 = 4$$

$$a_n < 158 \Rightarrow a_1 + (n-1)d < 158$$

$$\Rightarrow 96 + (n-1)4 < 158 \Rightarrow 96 + 4n - 4 < 158 \Rightarrow 4n < 158 - 92 \Rightarrow 4n < 66$$

$$\Rightarrow n < \frac{66}{4} \Rightarrow n < 16,5 \Rightarrow n \leq 16$$

پس ۱۶ جمله کوچک‌تر از ۱۵۸ وجود دارد.

سخت

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

پنج جمله‌ی اولیه‌ی مرتبه‌ی زوج یعنی $a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}$ و پنج جمله‌ی اولیه‌ی فرد یعنی a_1, a_3, a_5, a_7, a_9 و توجه کنید طبق قاعده‌ی اندیس‌ها در دنباله‌ی حسابی اگر $m + n = p + q$ باشد آن‌گاه $a_m + a_n = a_p + a_q$ است.

$$\left. \begin{aligned} \overbrace{a_2 + a_{10}}^{2a_6} + \overbrace{a_4 + a_8}^{2a_6} + a_6 &= 60 \Rightarrow 5a_6 = 60 \Rightarrow a_6 = 12 \\ \overbrace{a_1 + a_9}^{2a_5} + \overbrace{a_3 + a_7}^{2a_5} + a_5 &= 30 \Rightarrow 5a_5 = 30 \Rightarrow a_5 = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d = a_6 - a_5 = 6$$

سخت

۱ ۲ ۳ ۴ ۴

می‌دانیم: $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

$$\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \left| \frac{1}{\sin \alpha} \right| = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \xrightarrow[\text{ضرب و تقسیم می‌کنیم}]{\text{در مزدوج مخرج}} \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}}$$

$$= \left| \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right| = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

پس: $\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$

سخت

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

می‌دانیم: $(\sin a \pm \cos a)^2 = 1 \pm \sin 2a$, $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = 4 \Rightarrow \frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)} = 4 \Rightarrow \frac{1 + \sin 2x + 1 - \sin 2x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{-\cos 2x} = 4 \Rightarrow \cos 2x = \frac{-1}{4} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan^2 x + \cot^2 x = \tan^2 \frac{\pi}{3} + \cot^2 \frac{\pi}{3} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

سخت

۱ ۲ ۳ ۴ ۶

می دانیم: $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$

$$\tan(\alpha + 20) = \frac{1}{4} \Rightarrow \tan(25 - \alpha) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - (\alpha + 20)\right) = \frac{1 - \tan(\alpha + 20)}{1 + \tan(\alpha + 20)}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cot(25 - \alpha) = \frac{5}{3}$$

سخت ۱ ۲ ۳ ۴ ۷

می دانیم: $(\sin a + \cos a)^2 = 1 + \sin 2a$, $\tan a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a}$

$$\sin x + \cos x = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1 + \sin 2x = \frac{16}{9} \Rightarrow \sin 2x = \frac{5}{9}$$

$$\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x} = A \xrightarrow{\text{توان ۲}} \tan x + \cot x + \underbrace{\sqrt{\tan x \cot x}}_1 = A^2$$

$$\rightarrow \frac{2}{\sin 2x} + 2 = A^2 \rightarrow \frac{2}{\frac{5}{9}} + 2 = A^2 \rightarrow \frac{18}{5} + 2 = A^2 \rightarrow A^2 = \frac{22}{5} \rightarrow A = \sqrt{\frac{22}{5}}$$

سخت ۱ ۲ ۳ ۴ ۸

اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند آن گاه $a + c = 2b$ است و در یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q جمله m ام از رابطه $a_n = a_1 q^{n-1}$ بدست می آید.

$$a_7, 2a_5, a_8 \Rightarrow a_1 q^6, 2a_1 q^4, a_1 q^7 \xrightarrow{\div a_1 q^4} a_1 q + a_1 q^2 = 2a_1 q^4 \xrightarrow{\div a_1 q^4} 1 + q^2 = 2q^4 \Rightarrow q^6 - 2q^4 + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{q^2=A} A^3 - 2A + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} = q^2 \\ A = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} = q^2 \end{cases}$$

اگر فرض کنیم دنباله صعودی است جمله هفتم بزرگترین جمله است.

$$\frac{a_8}{a_7} = \frac{a_1 q^7}{a_1 q^6} = q^2 = (q^2)^2 = (2 + \sqrt{3})^2 = 4 + 3 + 4\sqrt{3} = 7 + 4\sqrt{3}$$

سخت

می دانیم: $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
 $\sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$, $\cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2\alpha \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2\alpha \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2(-\frac{1}{2})}{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{4}{5} \text{ و } \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-4}{5} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-4\sqrt{2}}{10} + \frac{3\sqrt{2}}{10} = \frac{-\sqrt{2}}{10}$$

$$\frac{x}{x-2} + \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{a}{x^2-4} \rightarrow \frac{x(x+2) + (x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)} = \frac{a}{(x+2)(x-2)}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + x^2 + x - 2x - 2 = a \Rightarrow 2x^2 + x - 2 - a = 0$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه ها} = -\frac{3}{2} \rightarrow \frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \rightarrow \frac{-2-a}{2} = -\frac{3}{2} \rightarrow a = 1$$

سخت ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$a = 1$ را در معادله‌ی درجه‌ی دوم قرار می‌دهیم:

$$2x^2 + x - 3 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \rightarrow |1 - (-\frac{3}{2})| = \frac{5}{2} \end{cases}$$

سخت

1 2 3 4 11

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A \times A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A^2 \times A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^{100} = (A^3)^{33} \cdot A = (-I)^{33} \times A = -I \times A = -A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموعه درایه‌ها} = -1$$

سخت

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$$

می‌دانیم: 1 2 3 4 12

$$\frac{1}{\sin 15} + \frac{\sqrt{3}}{\cos 15} = \frac{\cos 15 + \sqrt{3} \sin 15}{\sin 15 \cos 15} = \frac{\cos 15 + \tan 60 \sin 15}{\sin 15 \cos 15}$$

$$= \frac{\cos 15 + \frac{\sin 60}{\cos 60} \sin 15}{\sin 15 \cos 15} = \frac{\cos 60 \cos 15 + \sin 60 \sin 15}{\sin 15 \cos 15} = \frac{\cos(60 - 15)}{\sin 15 \cos 15} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \sin 30} = \frac{2 \cos 45}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)} = 8 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}$$

سخت

1 2 3 4 13

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{9}{10!}$$

$$= \left(\frac{2-1}{2!}\right) + \left(\frac{3-1}{3!}\right) + \left(\frac{4-1}{4!}\right) + \dots + \left(\frac{10-1}{10!}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{2!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{3}{3!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{4}{4!} - \frac{1}{4!}\right) + \dots + \left(\frac{10}{10!} - \frac{1}{10!}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \dots + \left(\frac{1}{9!} - \frac{1}{10!}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{10!} = 1 - \frac{1}{n!} \rightarrow n = 10 \rightarrow n^r + 1 = 101$$

سخت

1 2 3 4 14

$$\frac{(n-1)!}{n^2 - 3n + 2} = 720 \times 42 \times 120 \rightarrow \frac{(n-1)!}{(n-1)(n-2)} = \underbrace{10 \times 9 \times 8}_{720} \times \underbrace{7 \times 6 \times 5}_{42} \times \underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}_{120}$$

$$\rightarrow \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-1)(n-2)} = 10! \rightarrow (n-3)! = 10! \rightarrow n-3 = 10 \rightarrow n = 13$$

سخت

در یک دنباله‌ی هندسی نزولی نامحدود، حد مجموع جملات از رابطه‌ی $S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q}$ به دست می‌آیند. 1 2 3 4 15

$$a_1, a_2, a_3, \dots \rightarrow a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots$$

$$a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots \rightarrow a_1^2, a_1^2 q, a_1^2 q^2, \dots$$

$$\text{مجموع مجذورات تمام جملات} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{a_1^2}{1-q^2} = \frac{2}{3} \left(\frac{a_1}{1-q}\right)^2$$

$$\rightarrow \frac{a_1^2}{(1+q)(1-q)} = \frac{2}{3} \times \frac{a_1^2}{(1-q)^2} \rightarrow \frac{1}{1+q} = \frac{2}{3(1-q)}$$

$$\rightarrow 3 - 3q = 2 + 2q \rightarrow 5q = 1 \rightarrow q = \frac{1}{5} = 0.2$$

سخت

$x = 2$ در معادله صدق می‌کند: 1 2 3 4 16

$$\frac{5-m}{4} + \frac{m-3}{2 \times 6} = \frac{2}{4+6-4} \Rightarrow \frac{5-m}{4} + \frac{m-2}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{15-3m+m-2}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow 12-2m=4 \Rightarrow 2m=8 \Rightarrow m=4$$

توجه کنید که $x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$ با جایگذاری $m=4$ در معادله، آن را حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{x(x+4)} = \frac{x}{(x+4)(x-1)} \Rightarrow \frac{x+4+2}{2x(x+4)} = \frac{x}{(x+4)(x-1)}$$

$$\rightarrow (x+6)(x-1) = 2x^2 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 2x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases}$$

سخت

در ساخت این عدد ۳ رقمی فقط ۲ رقم می‌توان به کار برد، پس یکی از ارقام تکراری است بنابراین سه حالت داریم: عدد ما به صورت \overline{aab} یا \overline{aba} یا \overline{baa} باشد در هر حالت تعداد را محاسبه و نهایتاً جواب‌ها را جمع می‌کنیم (در ضمن عدد سه رقمی ما باید زوج نیز باشد)

حالت اول: $\overline{aa} \overline{b}$ $\xrightarrow{\text{تفکیک}} \begin{cases} b=0 \rightarrow \text{تعداد} = 9 \times 1 \times 1 = 9 \\ b=2, 4, 6, 8 \rightarrow \text{تعداد} = 8 \times 1 \times 4 = 32 \end{cases}$

حالت دوم: $\overline{aba} \xrightarrow{a \neq 0} a=2, 4, 6, 8 \rightarrow \text{تعداد} = 1 \times 9 \times 4 = 36$

حالت سوم: $\overline{baa} \xrightarrow{\text{تفکیک}} \begin{cases} a=0 \rightarrow \text{تعداد} = 9 \times 1 \times 1 = 9 \\ a=2, 4, 6, 8 \rightarrow \text{تعداد} = 8 \times 1 \times 4 = 32 \end{cases}$

طبق اصل جمع جواب برابر $9 + 32 + 36 + 9 + 32 = 118$ می‌باشد.

سخت

چون مجموعه مقادیر $f(x)$ کمتر از یک است بنابراین باید نامعادله‌ی $f(x) < 1$ را حل کرد.

$$f(x) < 1 \rightarrow \frac{3x^2 + 2x + k}{x^2 - 4x + 5} < 1 \rightarrow \frac{3x^2 + 2x + k}{x^2 - 4x + 5} - 1 < 0$$

$$\rightarrow \frac{3x^2 + 2x + k - x^2 + 4x - 5}{x^2 - 4x + 5} < 0 \rightarrow \frac{2x^2 + 6x + k - 5}{x^2 - 4x + 5} < 0$$

همواره مثبت ($a > 0, \Delta < 0$)

بنابراین باید نامعادله‌ی $2x^2 + 6x + k - 5 < 0$ را حل کنیم. چون مجموعه جواب این نامعادله فاصله‌ی $(m, 1)$ است پس یک ریشه‌ی معادله‌ی $2x^2 + 6x + k - 5 = 0$ برابر $x = 1$ است و ریشه‌ی معادله در معادله صدق می‌کند.

صدق $x = 1 \rightarrow 2 + 6 + k - 5 = 0 \rightarrow k = -3 \rightarrow 2x^2 + 6x - 8 < 0$

تعیین علامت $\rightarrow x^2 + 3x - 4 < 0 \rightarrow (x+4)(x-1) < 0 \rightarrow -4 < x < 1 \rightarrow x \in (-4, 1)$

بنابراین حداقل مقدار m برابر -4 است.

سخت

$$\frac{ax}{x^2 + x - 2} + \frac{2x-1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{-x-2} \rightarrow \frac{ax}{(x+2)(x-1)} + \frac{2x-1}{(x+1)(x+2)} = \frac{-1}{x+2}$$

$$\xrightarrow{\times (x+2)(x+1)(x-1)} ax(x+1) + (2x-1)(x-1) = -1(x+1)(x-1)$$

$$\rightarrow ax^2 + ax + 2x^2 - 2x - x + 1 = -x^2 + 1$$

$$\rightarrow ax^2 + 3x^2 - 3x + ax = 0 \rightarrow (a+3)x^2 + (a-3)x = 0$$

$$\rightarrow x((a+3)x + a-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ (a+3)x = 3-a \rightarrow x = \frac{3-a}{a+3} \end{cases}$$

مجموع جواب‌ها $= 2 \rightarrow \frac{3-a}{a+3} = 2 \rightarrow 2a+6=3-a \rightarrow 3a=-3 \rightarrow a=-1$

$$\frac{1}{-x-2} \xrightarrow{x=-1} \frac{1}{-(-1)-2} = \frac{1}{-1} = -1$$

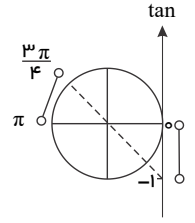
سمت راست تساوی به‌ازای $x = a = -1$ می‌شود:

سخت

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

می‌دانیم که $\frac{1+\tan x}{1-\tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ است.

$$\begin{aligned} \text{پس : } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4} &\Rightarrow \frac{3\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + x < \pi \\ \Rightarrow -1 < \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) < 0 &\Rightarrow -1 < \frac{m-2}{m+1} < 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \frac{m-2}{m+1} < 0 \Rightarrow -1 < m < 2 \quad (1) \\ \frac{m-2}{m+1} > -1 \Rightarrow \frac{m-2}{m+1} + 1 > 0 \\ \Rightarrow \frac{m-2+m+1}{m+1} > 0 \Rightarrow \frac{2m-1}{m+1} > 0 \Rightarrow (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \quad (2) \end{array} \right. \end{aligned}$$

به تعیین علامت دو نامعادله دقت کنید.

| | | | | |
|--------------------|-----------|------|---------------|-----------|
| m | $-\infty$ | -1 | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| $\frac{2m-1}{m+1}$ | | + | - | + |

| | | | | |
|-------------------|-----------|------|-----|-----------|
| m | $-\infty$ | -1 | 2 | $+\infty$ |
| $\frac{m-2}{m+1}$ | | + | - | + |

$$\xrightarrow{(2) \cap (1)} \frac{1}{2} < m < 2$$

$$\text{پس : } -\frac{1}{2} < m-1 < 1 \xrightarrow{\text{توان 2}} 0 \leq (m-1)^2 < 1$$

سخت



پاسخنامه کلیدی

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

| | | | | |
|----|---|---|---|---|
| ۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

| | | | | |
|----|---|---|---|---|
| ۱۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

| | | | | |
|----|---|---|---|---|
| ۱۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

