نام آزمون: هندسه ۳ تشریحی سطح ۲

افشار

مرکز مشاوره تحصیلی دکتر علیرضا افشار

۱ – فرض کنید d, c, b, a چهار واحد طول باشد. ماتریس زیر یک جدول تبدیل واحد است

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

بنابراین، یک واحد از a، شش واحد از c است، یک واحد از b هشت واحد از d است، و یک واحد از c نصف واحد از b است. این جدول را به عنوان یک ماتریس در نظر بگیرید و شرح دهید که چرا $a_{ik}a_{kj} = a_{ij}$. آیا می توانید بدون محاسبه ی مستقیم A^2 را پیدا کنید؟

۲ – نشان دهید $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$ معادلهٔ خطی است. که از نقاط (a, b) و (c, d) می‌گذرد.

۳ – اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این‌صورت اعداد حقیقی a و b و c و d را چنان بیابید که تساوی $|A|^2 - 5|A| + 6 = 0$ برقرار باشد.

۴ – دوماتریس 3×3 مانند A و B مثال برنید که $A \neq \overline{O}$ و $B \neq \overline{O}$ ولی $AB = \overline{O}$.

۵ – اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $(A + I)^6 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ حاصل $a - b$ را به‌دست آورید.

۶ – قضیهٔ یکتایی وارون: وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود، منحصر به فرد است.

۷ – اگر ماتریس A وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید.

$$(A^{-1}BA)^n = A^{-1}B^nA$$

۸ – معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x + 3y = 6$ بر آن مماس باشد.

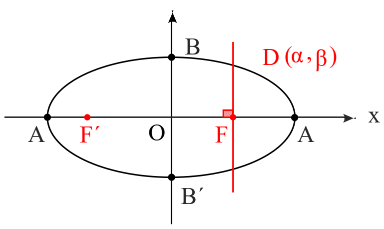
۹ – نقاط $A(-1, -1)$ و $B(1, 1)$ و $C(1, -3)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادله دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادله مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید.

۱۰ – معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0, 1)$ بوده و با دایرهٔ $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ مماس داخل باشد.

۱۱ – M روی یک بیضی با کانون‌های F و F' به گونه‌ای قرار دارد که MF و MF' بر هم عمودند. ثابت کنید: $MF \times MF' = 2b^2$

۱۲ – ثابت کنید در هر بیضی طول کوتاه‌ترین وتر کانونی برابر است با: $MN = \frac{2b^2}{a}$

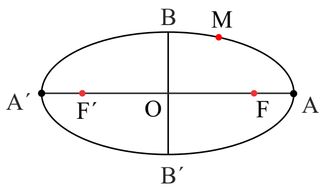
۱۳ – مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصلهٔ F از هر دو نقطهٔ O و A برابر ۲ است. اگر خطی که در نقطهٔ F بر AA' عمود کرده‌ایم بیضی را در نقطهٔ D قطع کرده باشد. مختصات D را به‌دست آورید.



۱۴- دو نقطهٔ A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید:

الف) در حالتی که دو پاره‌خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند باهم موازی‌اند.

ب) در حالتی‌که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.



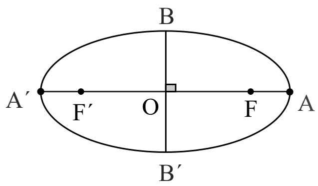
۱۵- نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$.

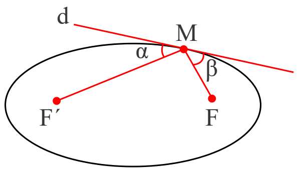
ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ت) طول‌های MF و MF' را به‌دست آورید.

$OA = ۵\,, OB = ۳\,, OF = ۴$



۱۶- در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ زاویهٔ FBF' چند درجه است؟

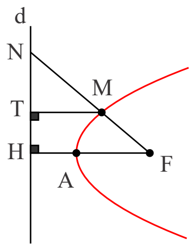


۱۷- فرض کنیم خط d مانند شکل مقابل در نقطهٔ M بر بیضی مماس است. ۱- مجموع فواصل کدام‌یک از نقاط خط d نسبت به دو کانون F و F' کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟

۲- دو زاویهٔ α و β نسبت به‌هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۳- اگر بدنهٔ داخلی بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی اشعهٔ نوری بر بدنه داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟

۱۸- در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\dfrac{FN}{FA} = \dfrac{۲NT}{TH}$



۱۹- طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ $A(۱,۱)$ در دایرهٔ $x^۲ - ۴x + y^۲ - ۲y = ۴$ را حساب کنید.

۲۰- نقطهٔ $S = (۲,۱)$ رأس سهمی افقی با کانون F می‌باشد. اگر F روی خط $y = -x + ۱$ قرار گیرد، مختصات F را مشخص کنید و سپس معادلهٔ سهمی را بنویسید.

پاسخنامه تشریحی

۱ – می د انیم اگر هر واحد از a مساوی m واحد از b باشد پس $a=mb$ ضمناً اگر هر واحد از b مساوی n واحد از c باشد پس $b=nc$ حال از ترکیب روابط فوق می توان فهمید هر واحد از a مساوی mn واحد از c است

$$\begin{cases} a=mb \\ b=nc \end{cases} \Rightarrow a=(mn)c$$

حال در ماتریس داده شده به طور مثال $a_{۱۲}$ یعنی هر واحد از a مساوی چند واحد از b است. و $a_{۲۴}$ یعنی هر واحد از b چند واحد از d است بنابراین

$a_{۱۲}\times a_{۲۴}$ یعنی هر واحد از a چند واحد از d است که این همان مقدار $a_{۱۴}$ می باشد.

پس در حالت کلی می توان گفت $a_{ik}\times a_{kj}=a_{ij}$ حال با توجه به رابطه فوق اگر $A^{۲}=[m_{ij}]_{۴\times۴}$ باشد

$$m_{ij}=\sum_{k=۱}^{۴} a_{ik}a_{kj}=\sum_{k=۱}^{۴} a_{ij}=۴a_{ij}$$

بنابراین کافی است تک تک درایه های A را در ۴ ضرب کنیم تا درایه های A ایجاد شوند.

سخت

۲ – معادلهٔ خطی که از نقاط (a,b) و (c,d) می‌گذرد به شکل زیر است:

$$y-b=\frac{b-d}{a-c}(x-a)\rightarrow y=(\frac{b-d}{a-c})x-(\frac{ab-ad}{a-c})+b$$

$$\rightarrow y=(\frac{d-b}{c-a})x+\frac{bc-ad}{c-a}$$

مطابق روش ساروس داریم:

$$\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ a & b \\ c & d \end{matrix} =۰\rightarrow (bx+yc+ad)-(ay+dx+bc)=۰$$

$$(b-d)x+(c-a)y+(ad-bc)=۰$$

$$(c-a)y=(d-b)x+(bc-ad)$$

$$y=(\frac{d-b}{c-a})x+\frac{bc-ad}{c-a}$$

سخت

۳ –

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad |A|^{۲}-۵|A|+۶=۰\rightarrow (|A|-۲)(|A|-۳)=۰$$

$$\rightarrow |A|=۲\xrightarrow[c=۱,d=۴]{a=۱,b=۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix}=۴-۲=۲$$

یا

$$|A|=۳\xrightarrow[c=۳,d=۳]{a=۲,b=۱}\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۳ \end{vmatrix}=۶-۳=۳$$

سخت

۴ –

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & a & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & c & ۰ \end{bmatrix} \ , \ B=\begin{bmatrix} d & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ c & f & g \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & f & g \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

سخت

۵ -

$$A+I=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\rightarrow a-b=2-1=1$$

$$(A+I)^2=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\rightarrow a-b=5-4=1$$

$$(A+I)^3=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}\rightarrow a-b=14-13=1$$

همانطور که می‌بینید در تمام توان‌ها $a-b=1$ می‌باشد.

سخت

۶ - فرض می‌کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند؛ ثابت می‌کنیم: $B=C$.

طبق فرض : $AB=BA=I$

طبق فرض : $AC=CA=I$

$$B=IB=(CA)B=C(AB)=CI=C$$

سخت

۷ -

$$(A^{-1}BA)^2=(A^{-1}BA)(A^{-1}BA)=A^{-1}B(\underbrace{AA^{-1}}_{I})BA=A^{-1}B^2A$$

$$(A^{-1}BA)^3=(A^{-1}B^2A)(A^{-1}BA)=A^{-1}B^2(\underbrace{AA^{-1}}_{I})BA=A^{-1}B^3A$$

به همین ترتیب داریم: $(A^{-1}BA)^n=A^{-1}B^nA$

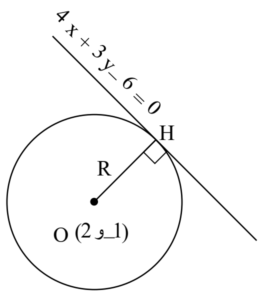
سخت

۸ - تمامی قطرهای دایره از مرکز می‌گذرند بنابراین از حل دستگاه معادله‌های دو قطر نقطه تقاطع آن‌ها (مرکز) به‌دست می‌آید.

$$\left.\begin{matrix} x-y=3 \\ x+y=1 \end{matrix}\right\}\xrightarrow[\text{جمع می‌کنیم}]{\text{طرفین دو معادله را با هم}}2x=4\rightarrow x=2\ ,\ 2-y=3$$

$\rightarrow y=2-3=-1\rightarrow$ مختصات مرکز دایره $O(2,-1)$

فاصلهٔ مرکز (O) از خط $4x+3y-6=0$ برابر شعاع دایره است.



$$R=OH=\frac{|4\times 2+3(-1)-6|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{1}{5}$$

معادلهٔ دایره را تشکیل می‌دهیم:

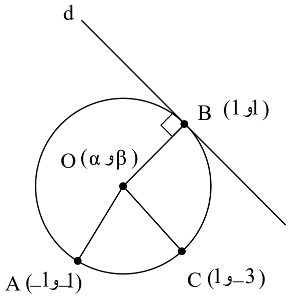
$$(x-2)^2+(y-(-1))^2=(\frac{1}{5})^2\rightarrow(x-2)^2+(y+1)^2=\frac{1}{25}$$

سخت

۹ -

هندسه 3 تشریحی سطح 2

فاصلهٔ هریک از نقاط A، B و C تا مرکز برابر شعاع دایره است.



$$OA=OB\to\sqrt{(-1-\alpha)^2+(-1-\beta)^2}=\sqrt{(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2}$$

$$\to(1+\alpha)^2+(1+\beta)^2=(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2$$

$$\to\cancel{1}+2\alpha+\cancel{\alpha^2}+\cancel{1}+2\beta+\cancel{\beta^2}=\cancel{1}-2\alpha+\cancel{\alpha^2}+\cancel{1}-2\beta+\cancel{\beta^2}$$

$$\to 4\alpha+4\beta=0\to\alpha+\beta=0\quad(1)$$

$$OB=OC\to\sqrt{(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2}=\sqrt{(1-\alpha)^2+(-3-\beta)^2}$$

$$\to\cancel{1}+\cancel{\alpha^2}-\cancel{2\alpha}+1+\cancel{\beta^2}-2\beta=1+\cancel{\alpha^2}-2\alpha+9+\cancel{\beta^2}+6\beta$$

$$\to 8\beta+8=0\to\beta=-1\to\alpha=1$$

مختصات مرکز $O(1,-1)$ $\qquad R=OB=\sqrt{(1-1)^2+(1-(-1))^2}=2$

معادله دایره $(x-1)^2+(y+1)^2=4$

شیب‌خط مماس در نقطهٔ B (m_d) معکوس قرینه شیب BO می‌باشد.

$$m_{BO}=\frac{-1-1}{1-1}$$

بنابراین شیب‌خط مماس بر دایره در نقطهٔ B صفر است. پس معادلهٔ خط مماس به‌صورت زیر می‌باشد:

$y-1=0(x-1)\to y=1$ معادلهٔ خط مماس

سخت

-۱۰

$$x^2+y^2-4x-6y-3=0\to O'=(-\frac{-4}{2},-\frac{-6}{2})=(2,3)$$

$$R'=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-6)^2-4(-3)}=\frac{1}{2}\sqrt{16+36+12}=\frac{\sqrt{64}}{2}=\frac{8}{2}=4$$

بررسی وضعیت مرکز $O(0,1)$ نسبت به دایره $x^2+y^2-4x-6y-3=0$:

مختصات مرکز را در معادله دایره جایگذاری می‌کنیم.

بنابراین O درون دایره قرار دارد و مسئله دو جواب دارد و دو دایره مماس داخل بر آن می‌توان رسم کرد. $\qquad 0^2+1^2-(4\times0)-(6\times1)-3=8<0$

طول خط‌المرکزین (OO') را به‌دست می‌آوریم.

$$OO'=\sqrt{(0-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$$

برای این‌که دو دایره مماس داخل باشند باید داشته باشیم:

$$OO'=|R-R'|\to 2\sqrt{2}=|R-4|\to\begin{cases}R_1-4=2\sqrt{2}\to R_1=2\sqrt{2}+4\\ R_2-4=-2\sqrt{2}\to R_2=4-2\sqrt{2}\end{cases}$$

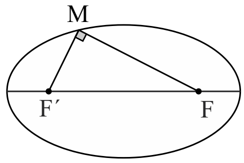
معادله دو دایره مماس داخل بر دایره داده شده در سؤال را در ادامه تشکیل می‌دهیم:

$$C_1 : (x-0)^2 + (y-1)^2 = (4+2\sqrt{2})^2$$

$$C_2 : (x-0)^2 + (y-1)^2 = (4-2\sqrt{2})^2$$

سخت

۱۱-



$$MF + MF' = 2a$$

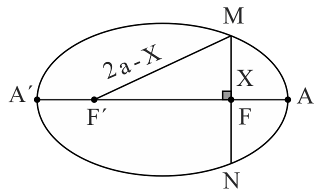
$$\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{طرفین معادله را به توان ۲}} (MF+MF')^2 = 4a^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \to MF^2 + MF'^2 + 2MF \times MF' = 4a^2 \\ \overset{\triangle}{MFF'} : MF^2 + MF'^2 = FF'^2 \to MF^2 + MF'^2 = 4c^2 \end{array}\right\} \to 4c^2 + 2MF \times MF' = 4a^2$$

$$\to 2MF \times MF' = 4(a^2 - c^2) = 4b^2 \to MF \times MF' = 2b^2$$

سخت

۱۲-



$$MF = x$$

$$MF' + MF = 2a$$

$$\to MF' = 2a - x$$

$$\overset{\triangle}{MFF'} : FF'^2 + MF^2 = MF'^2 \to x^2 + (2c)^2 = (2a-x)^2$$

$$\left.\begin{array}{r} \to \cancel{x^2} + 4c^2 = 4a^2 + \cancel{x^2} - 4ax \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{array}\right\} \to 4c^2 = 4(b^2+c^2) - 4ax$$

$$\to \cancel{4c^2} = 4b^2 + \cancel{4c^2} - 4ax \to \cancel{4}\, ax = \cancel{4}\, b^2 \to x = \frac{b^2}{a} \quad , \quad MN = 2MF = 2x = \frac{2b^2}{a}$$

سخت

۱۳-

$$OF = FA = 4 \to \alpha = 4$$

$$FF' = OF + OF' = 4 + 4 = 8 \to 2c = 8 \to c = 4$$

$$OA = OF + FA = 4 + 4 = 8 \to a = 8$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \to 8^2 = b^2 + 4^2 \to b = \sqrt{64-16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

اندازهٔ DF برابر نصف کوتاه‌ترین وتر کانونی است بنابراین:

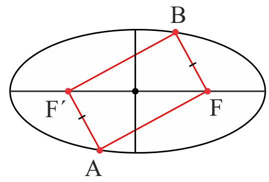
$$DF = \frac{b^2}{a} = \frac{(4\sqrt{3})^2}{8} = \frac{16\times 3}{8} = 6 \to \beta = 6$$

مختصات نقطهٔ $D(4,6)$ می‌باشد.

سخت

۱۴-

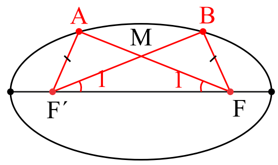
الف)



$$\left.\begin{array}{l} B \to BF+BF'=2a \text{ روی بیضی است} \\ A \to AF+AF'=2a \text{ روی بیضی است}\end{array}\right\} \to BF+BF'=AF+AF' \\ \left.\begin{array}{r} \\ AF'=BF\end{array}\right\} \to AF=BF' \\ \left.\begin{array}{r} \\ A'F=BF\end{array}\right\}$$

چهارضلعی $AFBF'$ متوازی‌الاضلاع است پس AF و BF' موازی‌اند.

ب)



$$\left.\begin{array}{l} A \to AF+AF'=2a \text{ روی بیضی است} \\ B \to BF+BF'=2a \text{ روی بیضی است} \\ AF'=BF \end{array}\right\} \to AF=BF'$$

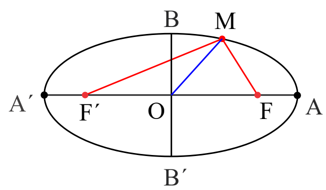
$$\left.\begin{array}{l} AF=BF' \\ AF'=BF \\ FF'=FF' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{AFF'} \cong \overset{\triangle}{BFF'} \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{F}_1=\hat{F'}_1$$

M از F و F' به یک فاصله است.

بنابراین روی عمودمنصف آن $\to MF=MF' \to$ متساوی‌الساقین است $FMF' \to$ (قطر کوچک بیضی) قرار دارد.

سخت

۱۵ - الف)



$$2a=10 \to a=5 \qquad 2b=6 \to b=3$$

$$a^2=b^2+c^2 \to 5^2=3^2+c^2 \to c=4$$

$$\to \left.\begin{array}{l} OF=OF'=C=4 \\ \text{فرض } OM=4 \end{array}\right\} \to OF=OF'=OM$$

ب) میانهٔ OM نصف FF' است. می‌دانیم اگر در مثلثی میانه اندازه میانه وارد بر یک ضلع نصف اندازهٔ آن ضلع باشد آن مثلث قائم‌الزاویه است بنابراین $F\hat{M}F'=90^\circ$ می‌باشد.

$$MF+MF'=2a \to MF+MF'=10$$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به توان ۲}} MF^2+MF'^2+2MF\times MF'=100 \\ \overset{\triangle}{FMF'}: MF^2+MF'^2=FF'^2 \to MF^2+MF'^2=64 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \to 64+2MF\times MF'=100 \to 2MF\times MF'=36 \to MF\times MF'=18 \\ MF+MF'=10 \to MF=10-MF' \end{array}\right\}$$

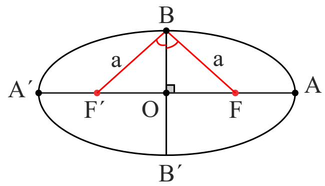
$$\to MF'\times(10-MF')=18 \to MF'^2-10MF'+18=0$$

$$\to MF'=\frac{5\pm\sqrt{25-18}}{1}=5\pm\sqrt{7} \to MF'=5+\sqrt{7}\,,\ MF=5-\sqrt{7}$$

سخت

۱۶ - راه‌حل اول:

طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. بنابراین:



$$AA' = ۲BB' \to \cancel{۲}\, a = ۲ \times \cancel{۲}\, b \to a = ۲b \to b = \frac{a}{۲} \quad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} BF + BF' = ۲a \\ BF = BF' \end{array}\right\} \to BF = BF' = a$$

$$\overset{\triangle}{BOF} : BO^۲ + OF^۲ = BF^۲ \to b^۲ + c^۲ = a^۲ \xrightarrow{(۱)} (\frac{a}{۲})^۲ + c^۲ = a^۲$$

$$\to c^۲ = a^۲ - \frac{a^۲}{۴} = \frac{۴a^۲ - a^۲}{۴} = \frac{۳a^۲}{۴} \to c = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$\to \overset{\triangle}{BOF} : \sin(O\hat{B}F) = \frac{OF}{BF} = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \to O\hat{B}F = ۶۰^\circ$$

$$F\hat{B}F' = O\hat{B}F + O\hat{B}F' = ۶۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

راه‌حل دوم:

در مثلث قائم‌الزاویه $o\overset{\triangle}{BF}$:

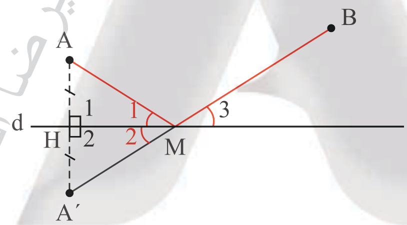
$$b = \frac{a}{۲} \Rightarrow OB = \frac{BF}{۲} \Rightarrow \sin(O\hat{B}F) = \frac{OB}{BF} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow O\overset{\triangle}{B}F = ۳۰ \Rightarrow o\hat{F'}B = ۳۰^\circ$$

پس در مثلث $\overset{\triangle}{BFF'}$ زاویهٔ B برابر ۱۲۰° درجه است.

سخت

۱۷ – ۱) اگر نقطه‌ای خارج از بیضی باشد مجموع فواصل آن از دو کانون بیشتر از مجموع فواصل نقطهٔ روی بیضی از دو کانون است بنابراین نقطهٔ M از d که روی بیضی قرار دارد کمترین مقدار مجموع فواصل از دو کانون F و F' را دارد.

۲) یادآوری مسئله کوتاه‌ترین مسیر:

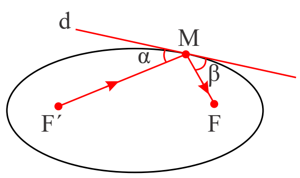


در شکل روبه‌رو برای این‌که نقطهٔ M را روی خط d طوری پیدا کنیم که طول $AM + MB$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد به روش زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا بازتاب A را نسبت به d پیدا کرده و A' می‌نامیم. سپس A' را به B وصل می‌کنیم. محل تلاقی $A'B$ با d نقطهٔ مورد (M) است. در ادامه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AH = A'H \\ H_۱ = H_۲ = ۹۰ \\ HM = HM \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} A\overset{\triangle}{H}M \cong A'\overset{\triangle}{H}M$$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \\ \text{متقابل به رأس} \quad \hat{M}_۲ = \hat{M}_۳ \end{array}\right\} \to \hat{M}_۱ = \hat{M}_۳ \to \alpha = \beta$$



۳) در تابش نور، زاویه تابش و بازتابش باهم برابرند بنابراین اگر اشعه نوری از کانون F' بر بیضی در نقطهٔ M با زاویهٔ α تابیده شود زاویهٔ بازتاب برابر α خواهد بود، چون $\beta = \alpha$ است بنابراین اشعه بازتاب نور از کانون دیگر یعنی F می‌گذرد.

سخت

۱۸ – فاصلهٔ هر نقطه روی محور تا خط هادی برابر فاصلهٔ آن تا کانون است. بنابراین:

$$MT = MF \ , \ \ FA = AH$$

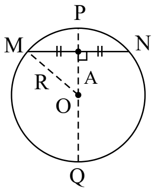
$$\left.\begin{array}{l} MT \parallel FH \to \dfrac{MT}{FH} = \dfrac{NT}{NH} \to \dfrac{MT}{2FA} = \dfrac{NT}{NH} \\ MT \parallel FH \to \dfrac{MF}{FN} = \dfrac{TH}{HN} \to \dfrac{MT}{FN} = \dfrac{TH}{NH} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین دو تساوی را بر هم}} \dfrac{\dfrac{\cancel{MT}}{2FA}}{\dfrac{\cancel{MT}}{FN}} = \dfrac{\dfrac{NT}{\cancel{NH}}}{\dfrac{TH}{\cancel{NH}}}$$

$$\to \frac{FN}{2FA} = \frac{NT}{TH} \to \frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$$

سخت

۱۹ – کوتاهترین وتر گذرنده از نقطهٔ A داخل دایره، وتری است که بر قطر گذرنده از A عمود باشد (وتر MN).

مطابق شکل داریم:



$$x^2 - 4x + y^2 - 2y = 4 \Rightarrow (x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 = 4$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9 \Rightarrow O(2,1) \text{ و } R = 3$$

$$\overset{\Delta}{AMO} : R^2 = OA^2 + MA^2 \Rightarrow 9 = 1 + MA^2 \Rightarrow MA = 2\sqrt{2} \Rightarrow MN = 2AM = 4\sqrt{2}$$

سخت

۲۰ – سهمی افقی می‌باشد پس عرض رأس سهمی با عرض کانون برابر است . پس کانون آن $F(\alpha, 1)$ می‌باشد، داریم:

$$F \in (y = -x + 1) \Rightarrow 1 = -\alpha + 1 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow F(0, 1)$$

می‌دانیم که $SF = a$. داریم:

$$SF = \sqrt{(2-0)^2 + (1-1)^2} = 2 \Rightarrow a = 2$$

همچنین از مختصات S **و** F می‌یابیم که دهانه سهمی به سمت چپ باز می‌شود. داریم:

$$\text{معادلهٔ سهمی} : (y-1)^2 = 4 \times (-2)(x-2) \Rightarrow (y-1)^2 = -8(x-2)$$

سخت