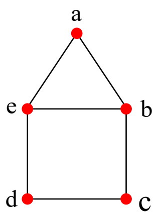
نام آزمون: گسسته تشریحی سطح ۲

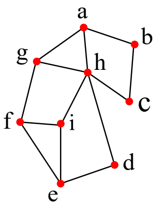
مرکز مشاوره تحصیلی دکتر علیرضا افشار

۱ - در گرافی با ۵ رأس عدد احاطه گری یک می‌باشد. حداقل و حداکثر تعداد یال‌های این گراف چقدر است؟

۲ - تمام مجموعه‌های احاطه گر مینیمم را برای گراف زیر بنویسید.



۳ - برای گراف مقابل یک مجموعهٔ احاطه گر بنویسید که غیر مینیمال باشد و سپس با حذف برخی از رأس‌های آن، آن را به یک مجموعهٔ احاطه گر مینیمال تبدیل کنید.



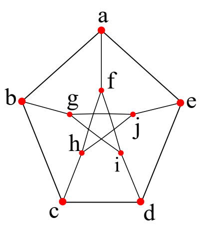
۴ - G گرافی است از مرتبهٔ p و اندازهٔ q که p فرد می‌باشد. چند گراف منتظم از مرتبهٔ p وجود دارد؟

۵ - در گرافی با p رأس و q یال که مجموعهٔ رأس‌های آن $V=\{v_1,v_2,v_3,\cdots v_p\}$ می‌باشد، ثابت کنید $\delta \leqslant \frac{2q}{p} \leqslant \Delta$

۶ - گرافی با ۲۰ رأس همبند است. بیشترین و کمترین تعداد یال‌های این گراف را بنویسید.

۷ - آیا گراف‌های ۳ -منتظم مرتبه ۸ و ۲ - منتظم مرتبه ۶ همواره همبند هستند؟

۸ - در گراف زیر دورهایی به طول ۹, ۸, ۶, ۵ را بنویسید.



۹ - چند مقسوم‌علیه $n = 3^3 \times 7 \times 11^4$ مربع کامل است؟

۱۰ - ثابت کنید $\log_2^5$ عددی گنگ است.

۱۱ - یک عدد مربع کامل در تقسیم بر ۵ چه باقیمانده‌هایی می‌تواند داشته باشد؟

۱۲ - در یک تقسیم مقسوم‌علیه برابر ۱۷ باقیمانده برابر ۳ می‌باشد حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد بدون آنکه خارج قسمت ، مقسوم‌علیه تغییر کنند؟

۱۳ - ثابت کنید: $[37]_{24} \subseteq [5]_8$

۱۴ - کم‌ترین تعداد تمبر لازم برای بسته‌ای که نیاز به ۱۸۵۰ ریال تمبر دارد با تمبرهای ۷۰ و ۶۰ ریالی چقدر است؟

۱۵ - باقیماندهٔ تقسیم 17^{19} بر ۲۵ را بیابید.

۱۶ - تمام جواب‌های n که به ازای آن‌ها معادلهٔ $(2m^2+1)x+(2m-4)y=n$ همواره در $\mathbb{Z}$ جواب دارد را بیابید:

۱۷ - باقیماندهٔ تقسیم 3^{15} بر ۱۷ را بیابید:

۱۸ - فرض کنید n عددی طبیعی باشد. ثابت کنید:

$(n!+1\,,(n+1)!+1)=1$

۱۹- فرض کنید $(a\,,\,b)=1\,,\,(a\,,\,c)=1$ آیا می‌توان نتیجه گرفت $(a^2+b\,,\,ab)=1\,,\,(a^2+b\,,\,a^2-b)=1$؟
در غیر این صورت مثال نقض بزنید:

۲۰- اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha+2\beta$ گنگ است.

پاسخنامه تشریحی

۱ - اگر $\gamma(G) = ۱$ یعنی حداقل یک رأس این گراف به تمام رأس‌های دیگر متصل است پس این گراف حداقل $p - ۱$ یال دارد. از طرفی می‌تواند کامل باشد یعنی حداکثر $\frac{p(p-۱)}{۲}$ یال دارد.

$$q_{min} = ۵ - ۱ = ۴$$
$$q_{max} = \frac{۵ \times ۴}{۲} = ۱۰$$

سخت

۲ - مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم برای این گراف ۲ عضو دارند. یعنی:

$$\gamma(G) = ۲$$

اگر رأس a را ملاک قرار دهیم این رأس با هر رأس دیگر به‌جز e و b یک مجموعهٔ احاطه‌گر با ۲ عضو می‌سازد.

$\{a,c\}, \{a,d\} \rightarrow$ ۲ حالت

اگر رأس e را ملاک قرار دهیم:

$\{e,c\}, \{e,d\}, \{e,b\} \rightarrow$ ۳ حالت

اگر رأس b را ملاک قرا دهیم:

$\{b,d\}, \{b,c\}, \{b,e\} \rightarrow$ ۳ حالت

$$۲ + ۳ + ۳ = ۸$$

سخت

۳ - مجموعهٔ $A = \{a,b,c,d,ef\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است که مینیمال نیست. حال اگر سه رأس a,e,c را حذف کنیم مجموعهٔ $B = \{b,d,f\}$ بدست می‌آید که باز هم احاطه‌گر است. حال اگر از مجموعهٔ B رأسی حذف کنیم دیگر احاطه‌گر نخواهد بود و پس B یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است.

سخت

۴ -

$$rp = ۲q$$

rp باید زوج باشد. با توجه به فرد بودن p باید r زوج باشد.

$$r < p \rightarrow r = ۰, ۲, \cdots, p - ۱$$

یعنی $\frac{p+۱}{۲}$ تا گراف منتظم موجود است.

سخت

۵ -

$$\begin{array}{l} \delta \leqslant \deg v_۱ \leqslant \Delta \\ \delta \leqslant \deg v_۲ \leqslant \Delta \\ \quad \vdots \\ \delta \leqslant \deg v_p \leqslant \Delta \\ \hline + \end{array}$$

$$\underbrace{\delta + \cdots + \delta}_{p\text{بار}} \leqslant \sum_{i=۱}^{p} \deg v_i \leqslant \underbrace{\Delta + \cdots + \Delta}_{p\text{بار}} \Rightarrow$$

$p\delta \leqslant 2q \leqslant p\Delta \xrightarrow{\div p} \delta \leqslant \frac{2q}{p} \leqslant \Delta$

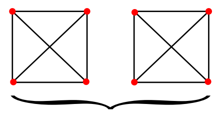
سخت

۶ - $q \leqslant \frac{p(p-1)}{2} \to q \leqslant \frac{20 \times 19}{2} \to q \leqslant 190 \to \max(q) = 190$

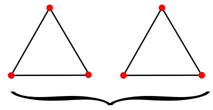
$p - 1 \leqslant q \Rightarrow q \geqslant 19 \to \min(q) = 19$

سخت

۷ - خیر، به عنوان مثال می‌توان اینگونه رسم کرد:



3_ منتظم مرتبه 8



2_ منتظم مرتبه 6

پس همواره همبند نیستند.

سخت

۸ - دور به طول ۵ a, b, c, d, e, a

دور به طول ۶ a, b, c, d, i, f, a

دور به طول ۸ $a, b, c, d, i, g, j, e, a$

دور به طول ۹ $a, b, c, d, e, j, g, i, f, a$

سخت

۹ - همهٔ مقسوم‌علیه‌های n به فرم $3^x \times 7^y \times 11^z$ هستند. برای اینکه یک عدد مربع کامل باشد، باید توان تمامی عوامل اول آن زوج باشد. بنابراین برای x و y و z به ترتیب ۲ و ۱ و ۳ انتخاب وجود دارد. پس ۶ مقسوم‌علیه مربع کامل هستند.

سخت

۱۰ - فرض کنیم $\log_{2}^{5}$ گویا باشد یعنی اعداد طبیعی n, m وجود دارند به طوریکه $\log_{2}^{5} = \frac{m}{n}$ در اینصورت $2^{\frac{m}{n}} = 5$ در نتیجه $2^n = 5^n$ که این تساوی هیچ‌گاه برقرار نیست زیرا به ازای هر n, m طبیعی راست تساوی زوج و سمت چپ تساوی عددی فرد است. بنابراین از این تناقض می‌توان درستی حکم را نتیجه گرفت.

سخت

۱۱ - عدد صحیح و دلخواه a در تقسیم بر ۵ به یکی از ۵ صورت $5k \ , \ 5k \pm 1 \ , \ 5k \pm 2$ است. حال کافی است هریک از صورت‌های فوق را به توان ۲ برسانیم تا باقیمانده‌های ممکن مربع هر عدد صحیح در تقسیم بر ۵ بدست آید:

$a = 5k \to a^2 = 5k'$

$a = 5k \pm 1 \to a^2 = 5k' + 1$

$a = 5k \pm 2 \to a^2 = 5k' + 4$

پس مربع هر عدد صحیح درتقسیم بر ۵ تنها می‌تواند باقیمانده‌های ۰ و ۱ و ۴ را بسازد.

سخت

۱۲ - طبق فرض $a = 17q + 13$ اگر x واحد به a اضافه کنیم به طوریکه خارج قسمت تغییر نکند، الگوریتم تقسیم به فرم زیر در می‌آید:

$a + x = 17q + (3 + x)$

به طوریکه $17 < 3 + x < 14$ یا $x < 14$ در نتیجه حداکثر مقدار x برابر ۱۳ می‌باشد.

سخت

۱۳ -

$$\left.\begin{array}{l} a\in[۳۷]_{۲۴} \to a \overset{۲۴}{\equiv} ۳۷ \xrightarrow{۸|۲۴} a\overset{۸}{\equiv}۳۷ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad ۳۷\overset{۸}{\equiv}۵\end{array}\right\} \to a\overset{۸}{\equiv}۵$$

در نتیجه $a\in[۵]_{۸}$ بنابراین $[۳۷]_{۲۴}\subseteq[۵]_{۸}$.

سخت

۱۴ -

$$۶۰x+۷۰y=۱۸۵۰ \to ۶x+۷y=۱۸۵ \to ۷y \overset{۶}{\equiv} ۱۸۵ \overset{۶}{\equiv} ۱۸۵-۶\times ۳۰ \overset{۶}{\equiv} ۵$$

$$\xrightarrow{۷\overset{۶}{\equiv}۱} y\overset{۶}{\equiv}۵ \to y=۶k+۵$$

$$۶x+۷(۶k+۵)=۱۸۵ \to ۶x=۱۵۰-۶\times ۷k \to x=۲۵-۷k$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x=۲۵-۷k \\ y=۶k+۵ \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

برای بدست آوردن جواب‌های صحیح و نامنفی معادله به فرم زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\geq ۰ \\ y\geq ۰ \end{cases} \to \begin{cases} ۲۵-۷k\geq ۰ \to k\leq ۳ \\ ۶k+۵\geq ۰ \to k\geq ۰ \end{cases}$$

در بین جواب‌های طبیعی معادله به ازای $x=۴$ و $y=۲۳$، $x+y=۲۷$ کم‌ترین مقدار لازم برای تمبرها بدست می‌آید.

سخت

۱۵ - می‌توان نوشت:

$$۱۷ \overset{۲۵}{\equiv} ۱۷-۲۵ \overset{۲۵}{\equiv} -۸ \overset{۲۵}{\equiv} -۲^{۳} \to ۱۷^{۱۹} \overset{۲۵}{\equiv} (-۲^{۳})^{۱۹} \overset{۲۵}{\equiv} -۲^{۵۷}$$

حال با محاسبهٔ توان‌های ۲ بر هم‌نهشتی $۲^{۱۰} \overset{۲۵}{\equiv} ۱۰۲۴ \overset{۲۵}{\equiv} -۴۱\times ۲۵+۱۰۲۴ \overset{۲۵}{\equiv} -۱$ می‌رسیم، پس داریم:

$$(۲^{۱۰})^{۵} \overset{۲۵}{\equiv} (-۱)^{۵} \to ۲^{۵۰} \overset{۲۵}{\equiv} -۱ \to ۲^{۵۰}\times ۲^{۷} \overset{۲۵}{\equiv} (-۱)\times(۲^{۷})$$

$$۲^{۵۷} \overset{۲۵}{\equiv} -۲^{۷} \overset{۲۵}{\equiv} -۱۲۸ \overset{۲۵}{\equiv} -۱۲۸+۵\times ۲۵ \overset{۲۵}{\equiv} -۳$$

بنابراین داریم:

$$۱۷^{۱۹} \overset{۲۵}{\equiv} -۲^{۵۷} \overset{۲۵}{\equiv} (-۱)(-۳) \overset{۲۵}{\equiv} ۳$$

سخت

۱۶ - فرض کنید $(۲m^{۲}+۱,۲m-۴)=d$ باید $d|n$ می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} d|۲m-۴ \to d|۲m^{۲}-۴m \\ d|۲m^{۲}+۱ \end{array}\right\} \to d|۴m+۱$$

$$\left.\begin{array}{l} d|۴m+۱ \\ d|۲m-۴ \to d|۴m-۸ \end{array}\right\} \to d|۹$$

بنابراین اگر $n=۹k$ باشد d در هر صورت آن را عاد خواهد کرد.

سخت

۱۷ - باید باقیماندهٔ تقسیم توان‌های مختلف ۳ بر ۱۷ را حساب کنیم تا به یک هم‌نهشتی مطلوب برسیم:

$$۳^{۱} \overset{۱۷}{\equiv} ۳ \quad , \quad ۳^{۲} \overset{۱۷}{\equiv} ۹ \quad , \quad ۳^{۳} \overset{۱۷}{\equiv} ۲۷ \overset{۱۷}{\equiv} ۲۷-۱۷ \overset{۱۷}{\equiv} ۱۰$$

$$۳^{۴} \overset{۱۷}{\equiv} ۳\times ۳^{۳} \overset{۱۷}{\equiv} ۳\times ۱۰ \overset{۱۷}{\equiv} ۳۰-۱۷\times ۲ \overset{۱۷}{\equiv} -۴$$

$$۳^{۵} \overset{۱۷}{\equiv} ۳\times ۳^{۴} \overset{۱۷}{\equiv} ۳\times(-۴) \overset{۱۷}{\equiv} -۱۲ \overset{۱۷}{\equiv} -۱۲+۱۷ \overset{۱۷}{\equiv} ۵$$

$$۳^{۶} \overset{۱۷}{\equiv} ۳\times ۵ \overset{۱۷}{\equiv} ۱۵ \overset{۱۷}{\equiv} ۱۵-۱۷ \overset{۱۷}{\equiv} -۲$$

$$۳^{۷} \overset{۱۷}{\equiv} ۳\times(-۲) \overset{۱۷}{\equiv} -۶$$

$$۳^{۸} \overset{۱۷}{\equiv} ۳\times(-۶) \overset{۱۷}{\equiv} -۱۸ \overset{۱۷}{\equiv} -۱۸+۱۷ \overset{۱۷}{\equiv} -۱$$

حال می‌توان نوشت:

$$۶ \overset{۱۷}{\equiv} (-۶) \times (-۱) \overset{۱۷}{\equiv} ۳^۷ \times ۳^۸ \overset{۱۷}{\equiv} ۳^{۱۵}$$

پس باقیماندهٔ تقسیم $۳^{۱۵}$ بر ۱۷ برابر ۶ است.

سخت

۱۸- فرض کنیم $(n!+۱\,,\,(n+۱)!+۱)=d$ داریم:

$$\begin{cases} d|n!+۱ \\ d|(n+۱)!+۱ \end{cases} \to d|(n+۱)!+۱-(n+۱)(n!+۱) \to d|n$$

حال از $d|n\,,\,d|n!+۱$ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} d|n \\ d|n!+۱ \end{cases} \to d|n!+۱-(n-۱)!\times n \to d|۱ \to d=۱$$

سخت

۱۹- درستی $(a^۲+b\,,\,ab)=۱$ را اثبات می‌کنیم و برای $(a^۲+b\,,\,a^۲-b)=۱$ مثال نقض می‌آوریم:

فرض کنید $(a^۲+b\,,\,ab)=d$ آنگاه:

$$\left.\begin{matrix} d|ab \\ d|a^۲+b \xrightarrow{\times a} d|a^۳+ab \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} d|-ab \\ d|a^۳+ab \end{cases} \to d|a^۳$$

$$\left.\begin{matrix} d|a^۲b^۲+b^۳ \\ d|a^۲b^۲ \end{matrix}\right\} \to d|b^۳$$

$$d|(a^۳\,,\,b^۳) \to d|۱ \to d=۱$$

و اگر قرار دهید $a=۳\,,\,b=۵\,,\,c=۵$ مثال نقضی برای $(a^۲+b\,,\,a^۲-b)=۱$ بدست می‌آید.

سخت

۲۰- اگر $\alpha+۲\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است.

از طرفی طبق فرض $\alpha+\beta$ نیز عددی گویا است.

می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست درنتیجه: $(\alpha+۲\beta)-(\alpha+\beta)=\beta\in\mathbb{Q}$

اما با توجه به فرض مسئله: β گنگ است.

با توجه به تناقض ایجادشده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

سخت