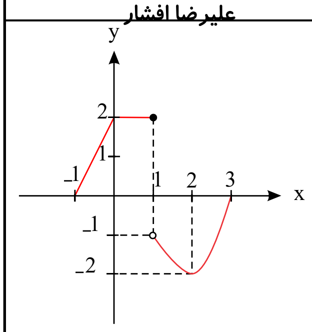
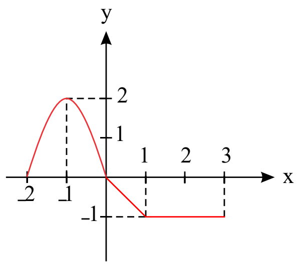
نام آزمون: حسابان ۲ تشریحی سطح ۲

افشار

مرکز مشاوره تحصیلی دکتر علیرضا افشار



۱- نمودار تابع $y=f(x-۱)$ به‌صورت مقابل است، نمودار تابع $y=f(\frac{۱}{۲}x)-۱$ را رسم کنید.



۲- نمودار تابع $y=f(-۲x)$ به‌صورت مقابل است، نمودار تابع $y=-۲f(x-۲)$ را رسم کنید.

۳- تابع $y=x^۳$ را ابتدا نسبت به محور yها قرینه کرده، سپس نمودار حاصل را دو واحد به چپ منتقل کرده و در نهایت آن را ۵ واحد به بالا منتقل می کنیم تا تابع f حاصل شود، ضابطهٔ تابع وارون تابع f را بیابید.

۴- اگر f روی $\mathbb{R}$ تابعی اکیداً صعودی باشد، دامنهٔ تابع g را بیابید.

$$g(x)=\sqrt{f(|x-۲|)-f(|x+۱|)}$$

۵- اگر f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، دامنهٔ تابع g را بیابید.

$$g(x)=\sqrt{f(|x-۳|)-f(|x+۲|)}$$

۶- اگر f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، دامنهٔ تابع g را بیابید.

$$g(x)=\sqrt{f(|۲x-۱|)-f(|x+۱|)}$$

۷- اگر f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی و $f(۱)=۰$ باشد، دامنهٔ تابع زیر را بیابید.

$$g(x)=\sqrt{(x^۲-۳x)f(x)}$$

۸- معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\sin^۲(x-\frac{\pi}{۸})+۲\cos(\frac{۵\pi}{۸}-x)=۳$$

۹- اگر $\frac{\pi}{۳}<\alpha<\frac{۵\pi}{۶}$ و $\tan\alpha=\frac{۲m-۱}{۳}$، آنگاه حدود m را بیابید.

۱۰- اگر $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^n+mx^۳+x^۲-۱}{۴x^۳+x^۲-۳}=-۲$ ، آن‌گاه m و n را بیابید. $(n\in\mathbb{N})$

۱۱- حاصل حدهای زیر را بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim_{x\to+\infty}[\frac{۳x+۱}{x+۲}]$ ب) $\lim_{x\to-\infty}[\frac{x+۲}{x-۱}]$

۱۲- حاصل حد مقابل را بیابید.

$$\lim_{x\to\frac{۵\pi}{۴}}\frac{x-۱}{\sqrt{۲}\sin x+۱}$$

۱۳ - مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\frac{(x+۱)\sqrt{x}}{x^۳-x}$ را بیابید.

۱۴ - در تابع $f(x)=\frac{x^۲+۴x+۳}{x^۲+mx+۹}$ ، m را چنان بیابید که تابع فقط یک مجانب قائم داشته باشد.

۱۵ - نمودار هریک از توابع داده شده را رسم کرده و بیشترین و کمترین مقدار و دورهٔ تناوب تابع را مشخص کنید.

الف) $y=|\sin x|$

ب) $y=|\cos ۲x|$

۱۶ - اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۴}$ و $\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{۱}{۶}$ باشد حاصل $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ را بیابید. $(۰\le\alpha<\beta\le\frac{\pi}{۲})$

۱۷ - اگر $\tan(\alpha+\beta)=۳$ و $\tan(\alpha-\beta)=۲$ باشد حاصل $\tan ۲\alpha$ را بیابید.

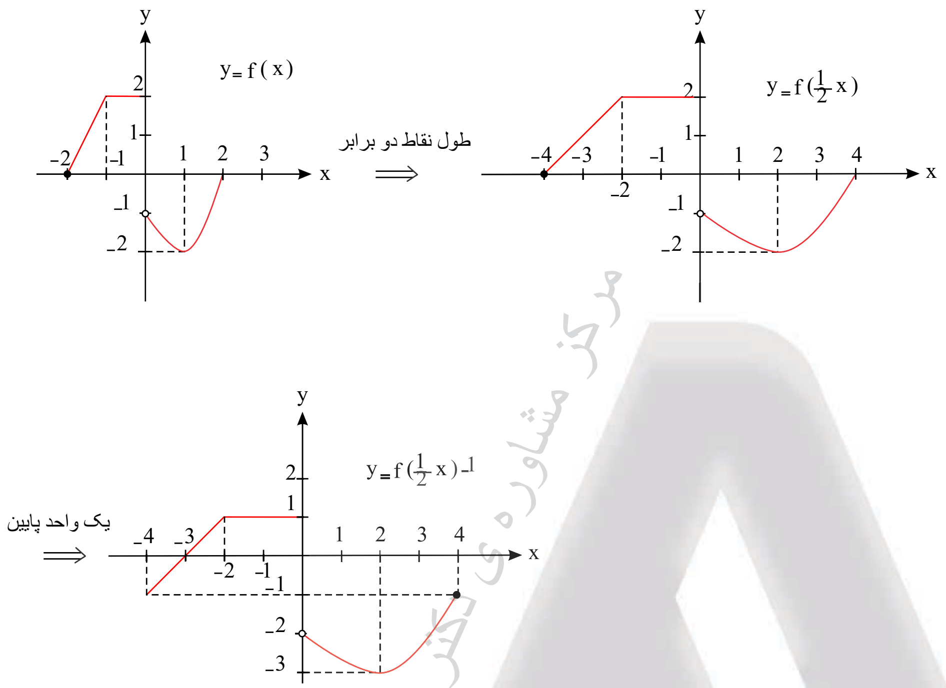
۱۸ - اگر $\cos(\alpha+\beta)=\frac{۳}{۵}$ و $\tan(\alpha-\beta)=\frac{۵}{۱۲}$ باشد حاصل $\tan ۲\alpha$ و $\tan ۲\beta$ را بیابید. $(۰<\alpha+\beta<\frac{\pi}{۲})$

۱۹ - اگر $\sin x\cdot\sin y=\frac{۳}{۴}$ و $\tan x\cdot\tan y=۳$ باشد حاصل $\tan(x-y)$ را بیابید.

۲۰ - اگر $\tan(\alpha-\frac{\beta}{۲})=\sqrt{۳}-۱$ و $\tan(\alpha+\frac{\beta}{۲})=\sqrt{۳}+۱$ باشد حاصل $\tan ۲\beta$ را بیابید. $(۰\le\alpha\ ,\ \beta\le\frac{\pi}{۲})$

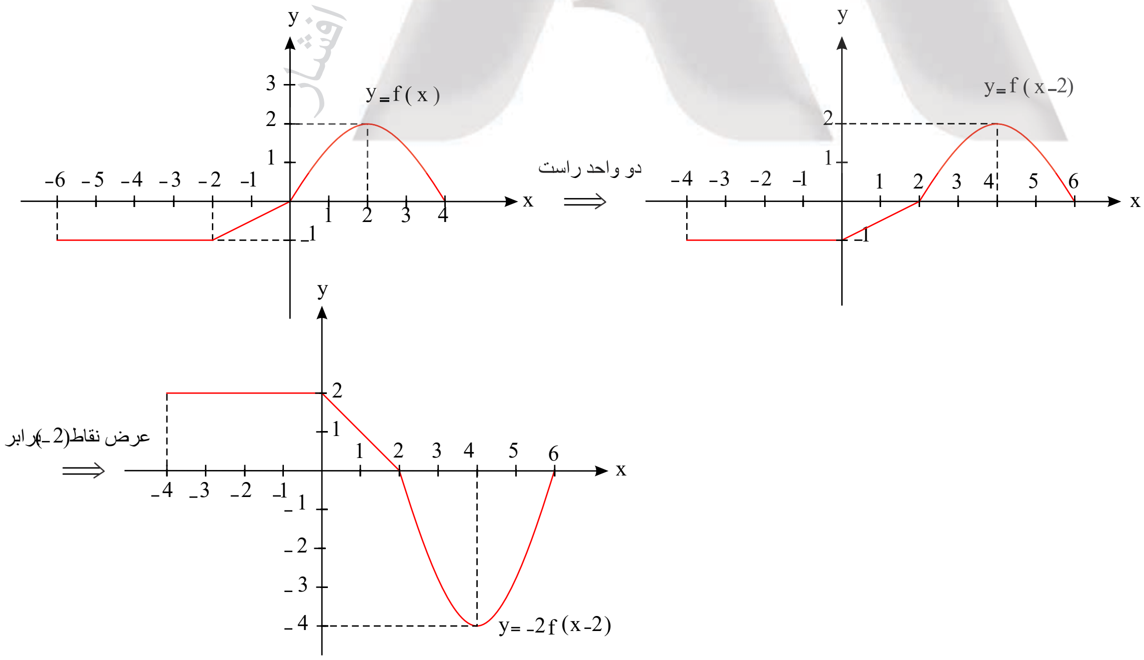
پاسخنامه تشریحی

۱- با توجه به این که برای رسم $y=f(x-۱)$ باید $y=f(x)$ را یک واحد به راست منتقل کنیم، پس برای رسم $y=f(x)$ از روی $y=f(x-۱)$ باید نمودار $y=f(x-۱)$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم پس داریم:



سخت

۲- با توجه به این که برای رسم $y=f(-۲x)$ باید در نمودار $y=f(x)$ طول نقاط را بر -۲ تقسیم کنیم، حال برای رسم $y=f(x)$ از روی $y=f(-۲x)$ باید در نمودار $y=f(-۲x)$ طول نقاط را در -۲ ضرب کنیم.



سخت

۳-

حسابان 2 تشریحی سطح 2

$$y=x^3 \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور } y\text{ها}} y=(-x)^3=-x^3 \xrightarrow[x\to x+2]{\text{۲واحد چپ}} y=-(x+2)^3$$

$$\xrightarrow{\text{۵واحد بالا}} y=f(x)=-(x+2)^3+5 \Rightarrow (x+2)^3=5-y$$
$$\Rightarrow x+2=\sqrt[3]{5-y} \Rightarrow x+2=-\sqrt[3]{y-5} \Rightarrow x=-2-\sqrt[3]{y-5}$$
$$\Rightarrow y=f^{-1}(x)=-2-\sqrt[3]{x-5}$$

سخت

۴ – نکته: اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد و $f(a)\le f(b)$ آنگاه $a\le b$.

$$g(x)=\sqrt{f(|x-2|)-f(|x+1|)} \Rightarrow f(|x-2|)-f(|x+1|)\ge 0$$

$$\Rightarrow f(|x-2|)\ge f(|x+1|) \xrightarrow{f\text{ اکیداً صعودی}} |x-2|\ge |x+1|$$

برای حل این گونه نامعادلات، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(x-2)^2\ge (x+1)^2 \Rightarrow x^2-4x+4\ge x^2+2x+1 \Rightarrow 4-1\ge 2x+4x$$

$$\Rightarrow 6x\le 3 \Rightarrow x\le \frac{1}{2} \Rightarrow D_g=(-\infty,\frac{1}{2}]$$

سخت

۵ – نکته: اگر تابع f اکیداً نزولی باشد و $f(a)\le f(b)$ آنگاه $a\ge b$.

$$g(x)=\sqrt{f(|x-3|)-f(|x+2|)} \Rightarrow f(|x-3|)-f(|x+2|)\ge 0$$

$$\Rightarrow f(|x-3|)\ge f(|x+2|) \xrightarrow{f\text{ اکیداً نزولی}} |x-3|\le |x+2|$$

$$(x-3)^2\le (x+2)^2 \Rightarrow x^2-6x+9\le x^2+4x+4 \Rightarrow 9-4\le 4x+6x$$

$$\Rightarrow 10x\ge 5 \Rightarrow x\ge \frac{1}{2} \Rightarrow D_g=[\frac{1}{2},+\infty)$$

سخت

۶ – نکته: اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد و $f(a)\le f(b)$ آنگاه $a\ge b$.

$$g(x)=\sqrt{f(|2x-1|)-f(|x+1|)} \Rightarrow f(|2x-1|)-f(|x+1|)\ge 0$$

$$\Rightarrow f(|2x-1|)\ge f(|x+1|) \xrightarrow{f\text{ اکیداً نزولی}} |2x-1|\le |x+1|$$
$$\Rightarrow (2x-1)^2\le (x+1)^2 \Rightarrow 4x^2-4x+1\le x^2+2x+1 \Rightarrow 3x^2-6x\le 0$$

$$\Rightarrow 3x(x-2)\le 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & 0 & & 2 & \\ \hline 3x(x-2) & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow 0\le x\le 2$$
$$\Rightarrow D_g=[0,2]$$

سخت

۷ –

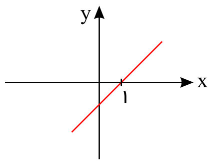
$$g(x)=\sqrt{(x^2-3x)f(x)} \Rightarrow (x^2-3x)f(x)\ge 0$$

چون f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی و $f(1)=0$ است، داریم:

برای $x<1$ تابع f منفی است. $x<1 \Rightarrow f(x)<f(1) \Rightarrow f(x)<0 \Rightarrow$

برای $x>1$ تابع f مثبت است. $x>1 \Rightarrow f(x)>f(1) \Rightarrow f(x)>0 \Rightarrow$

به‌طور تقریبی نمودار f به‌صورت مقابل است.



$x^۲-۳x=۰ \Rightarrow x(x-۳)=۰ \Rightarrow x=۰\ ,\ x=۳$

x		۰		۱		۳	
$x^۲-۳x$	+	۰	−		−	۰	+
$f(x)$	−		−	۰	+		+
$(x^۲-۳x)f(x)$	−	۰	+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow ۰\le x\le ۱$ یا $x\ge ۳ \Rightarrow D_g=[۰,۱]\cup[۳,+\infty)$

سخت

۸ - میدانیم: $\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$

$\sin^۲(x-\frac{\pi}{۸})+۲\cos(\frac{۵\pi}{۸}-x)=۳ \Rightarrow \sin^۲(x-\frac{\pi}{۸})+۲\sin(\frac{\pi}{۲}-(\frac{۵\pi}{۸}-x))-۳=۰$

$\Rightarrow \sin^۲(x-\frac{\pi}{۸})+۲\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{۵\pi}{۸}+x)-۳=۰$

$\Rightarrow \sin^۲(x-\frac{\pi}{۸})+۲\sin(x-\frac{\pi}{۸})-۳=۰\ ,\ \sin(x-\frac{\pi}{۸})=t$

$\Rightarrow t^۲+۲t-۳=۰ \Rightarrow t=۱\ ,\ t=-۳$

$\sin(x-\frac{\pi}{۸})=-۳$ غ ق ق $,\ \sin(x-\frac{\pi}{۸})=۱ \Rightarrow x-\frac{\pi}{۸}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$

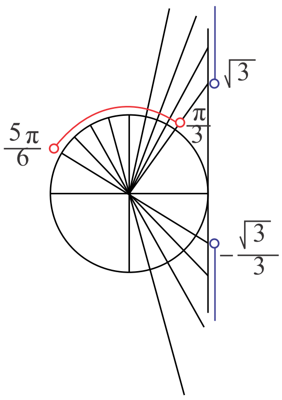
$\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸} \Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۸}$

سخت

۹ -

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل داریم:

$\frac{\pi}{۳}<\alpha<\frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow \frac{\pi}{۳}<\alpha<\pi-\frac{\pi}{۶}$



$\frac{\pi}{۳}<\alpha<\pi-\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \tan\alpha>\sqrt{۳}$ یا $\tan\alpha<-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$\Rightarrow \frac{۲m-۱}{۳}>\sqrt{۳}$ یا $\frac{۲m-۱}{۳}<-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$\Rightarrow ۲m-۱>۳\sqrt{۳}$ یا $۲m-۱<-\sqrt{۳}$

$\Rightarrow m>\frac{۳\sqrt{۳}+۱}{۲}$ یا $m<\frac{۱-\sqrt{۳}}{۲}$

سخت

۱۰-

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^n+mx^۳+x^۲-۱}{۴x^۳+x^۲-۳}=-۲$$

حالت ۱) $n<۳\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{mx^۳}{۴x^۳}=\frac{m}{۴}=-۲\Rightarrow m=-۸\Rightarrow n<۳\ ,\ m=-۸$ جواب

حالت ۲) $n=۳\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۳+mx^۳}{۴x^۳}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(۲+m)x^۳}{۴x^۳}=\frac{۲+m}{۴}=-۲$

$\Rightarrow ۲+m=-۸\Rightarrow m=-۱۰\Rightarrow n=۳\ ,\ m=-۱۰$ جواب

حالت ۳) $n>۳\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^n}{۴x^۳}=\pm\infty\to$ غیر قابل قبول

سخت

۱۱-

الف) می‌دانیم $\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x+۱}{x+۲}=۳$ **، حال باید ببینیم کسر** $\frac{۳x+۱}{x+۲}$ **چگونه به ۳ میل می‌کند، برای این کار ۳ برابر مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.**

$$\lim_{x\to+\infty}[\frac{۳x+۱}{x+۲}]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{۳x+۶-۵}{x+۲}]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{۳(x+۲)}{x+۲}-\frac{۵}{x+۲}]=\lim_{x\to+\infty}[۳-\frac{۵}{x+۲}]$$

$$=[۳-\frac{۵}{+\infty}]=[۳-۰^+]=[۳-\varepsilon]=۲$$

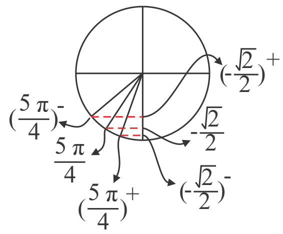
ب) می‌دانیم $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+۲}{x-۱}=۱$ **، حال باید ببینیم کسر** $\frac{x+۲}{x-۱}$ **چگونه به یک میل می‌کند، برای این کار مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.**

$$\lim_{x\to-\infty}[\frac{x+۲}{x-۱}]=\lim_{x\to-\infty}[\frac{x-۱+۳}{x-۱}]=\lim_{x\to-\infty}[\frac{x-۱}{x-۱}+\frac{۳}{x-۱}]=\lim_{x\to-\infty}[۱+\frac{۳}{x-۱}]$$

$$=[۱+\frac{۳}{-\infty}]=[۱+۰^-]=[۱-\varepsilon]=۰$$

سخت

۱۲-



$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to(\frac{۵\pi}{۴})^-} \frac{x-۱}{\sqrt{۲}\sin x+۱} = \frac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\varepsilon)+۱} = \frac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{-۱+\sqrt{۲}\varepsilon+۱}$$

$$= \frac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{+\sqrt{۲}\varepsilon} = \frac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{۰^+} = +\infty$$

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to(\frac{۵\pi}{۴})^+} \frac{x-۱}{\sqrt{۲}\sin x+۱} = \frac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\varepsilon)+۱} = \frac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{-۱-\sqrt{۲}\varepsilon+۱}$$

$$= \frac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{-\sqrt{۲}\varepsilon} = \frac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{۰^-} = -\infty$$

توجه کنید که $\frac{۵\pi}{۴}-۱$ عددی مثبت است.

سخت

-۱۳

$$f(x)=\frac{(x+۱)\sqrt{x}}{x^۳-x} \quad , \quad x^۳-x=۰ \Rightarrow x(x^۲-۱)=۰ \Rightarrow x=۰\,,\pm۱$$

شرط رادیکال : $x \geq ۰ \Rightarrow D_f=[۰,+\infty)-\{۰,۱\}=(۰,+\infty)-\{۱\}$

تابع در همسایگی $x=-۱$ تعریف نشده است، پس خط $x=-۱$ مجانب قائم تابع نیست.

حال تابع را تا حد ممکن ساده می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{(x+۱)\sqrt{x}}{x(x^۲-۱)}=\frac{(x+۱)\sqrt{x}}{x(x-۱)(x+۱)}=\frac{\sqrt{x}}{x(x-۱)}=\frac{۱}{(x-۱)\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to۰^+}\frac{۱}{(x-۱)\sqrt{x}}=\frac{۱}{-۱\times\sqrt{۰^+}}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to۱^-}\frac{۱}{(x-۱)\sqrt{x}}=\frac{۱}{(۱-\varepsilon-۱)\times۱}=\frac{۱}{-\varepsilon}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to۱^+}\frac{۱}{(x-۱)\sqrt{x}}=\frac{۱}{(۱+\varepsilon-۱)\times۱}=\frac{۱}{+\varepsilon}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

خطوط $x=۰$ و $x=۱$ مجانب‌های قائم تابع هستند.

سخت

-۱۴

$$f(x)=\frac{(x+۱)(x+۳)+۴x+۳}{x^۲+mx+۹}$$

حالت ۱) مخرج ریشه مضاعف داشته باشد.

$$x^۲+mx+۹=۰\Rightarrow\Delta=۰\Rightarrow m^۲-۳۶=۰\Rightarrow m=\pm۶$$

$$m=۶\Rightarrow f(x)=\frac{(x+۱)(x+۳)}{x^۲+۶x+۹}=\frac{(x+۱)(x+۳)}{(x+۳)^۲}=\frac{x+۱}{x+۳}$$

فقط $x=-۳$ مجانب قائم است.

$$m=-۶\Rightarrow f(x)=\frac{(x+۱)(x+۳)}{x^۲-۶x+۹}=\frac{(x+۱)(x+۳)}{(x-۳)^۲}$$

فقط $x=۳$ مجانب قائم است.

حالت ۲) مخرج بر $x+۳$ بخش پذیر باشد

$$x+۳=۰\Rightarrow x=-۳\Rightarrow x^۲+mx+۹=۰\Rightarrow ۹-۳m+۹=۰\Rightarrow m=۶$$

این حالت در بالا بررسی شده است.

حالت ۳) مخرج بر $x+۱$ بخش پذیر باشد.

$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\Rightarrow x^۲+mx+۹=۰\Rightarrow ۱-m+۹=۰\Rightarrow m=۱۰$$

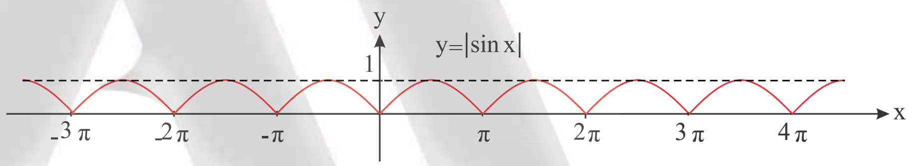
$$f(x)=\frac{(x+۱)(x+۳)}{x^۲+۱۰x+۹}=\frac{(x+۱)(x+۳)}{(x+۱)(x+۹)}=\frac{x+۳}{x+۹}$$

فقط $x=-۹$ مجانب قائم است.

سخت

۱۵ – الف) با رسم $y=\sin x$ و قرینه کردن قسمت‌های زیر محور طول‌ها نسبت به این محور خواهیم داشت:

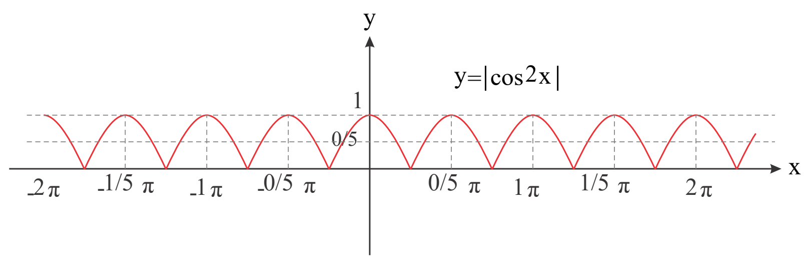
$$\begin{cases}T=\pi\\ \max=۱\\ \min=۰\end{cases}$$



ب) کافی است نمودار $y=\cos x$ را رسم کرده و سپس طول نقاط را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کرده $(\cos ۲x)$ و سپس نقاط با عرض منفی را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم $|\cos ۲x|$ تا به نمودار زیر برسیم:

$$x=۰,\ \frac{\pi}{۲},\ \pi,\ \frac{۳\pi}{۲},\ ۲\pi,\ \cdots\to y=۱\Rightarrow T=\frac{\pi}{۲}$$

$$\begin{cases}T=\frac{\pi}{۲}\\ \max=۱\\ \min=۰\end{cases}$$



سخت

۱۶ – با توجه به فرض $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۴}$ از دو طرف تساوی تانژانت می‌گیریم:

حسابان 2 تشریحی سطح 2

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan(\frac{\pi}{۴})=۱\Rightarrow\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=۱$$

با جایگذاری $\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{۱}{۶}$ داریم:

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\frac{۱}{۶}}=۱\Rightarrow\tan\alpha+\tan\beta=\frac{۵}{۶}\quad\Rightarrow\tan\beta=\frac{۵}{۶}-\tan\alpha\qquad(۱)$$

پس نتیجه (۱) را در عبارت $\tan\alpha\tan\beta=\frac{۱}{۶}$ جایگذاری می‌کنیم:

$$\tan\alpha(\frac{۵}{۶}-\tan\alpha)=\frac{۱}{۶}\xrightarrow{\tan\alpha=m}\frac{۵}{۶}m-m^۲=\frac{۱}{۶}\xrightarrow{\times۶}۵m-۶m^۲=۱\Rightarrow۶m^۲-۵m+۱=۰\Rightarrow m=\frac{۵\pm۱}{۱۲}$$

$$\Rightarrow m=\tan\alpha=\begin{cases}\frac{۱}{۳}\Rightarrow\tan\beta=\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲}\Rightarrow\tan\beta=\frac{۱}{۳}\end{cases}\xrightarrow{\beta>\alpha}\tan\beta>\tan\alpha\ \Rightarrow\tan\beta=\frac{۱}{۲}\ ,\ \tan\alpha=\frac{۱}{۳}$$

سخت

۱۷ - ابتدا زاویهٔ ۲α را برحسب $\alpha+\beta$ و $\alpha-\beta$ می‌نویسیم:

$$۲\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\xrightarrow[\text{tan می‌گیریم}]{\text{از طرفین}}\tan۲\alpha=\tan((\alpha+\beta)+(\alpha-\beta))$$

$$\Rightarrow\tan۲\alpha=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{۱-\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}$$

$$\Rightarrow\tan۲\alpha=\frac{۳+۲}{۱-۳\times(+۲)}=\frac{۵}{-۵}=-۱$$

سخت

۱۸ - ابتدا باید حاصل $\tan(\alpha+\beta)$ را بدست آوریم:

$$۱+\tan^۲(\alpha+\beta)=\frac{۱}{\cos^۲(\alpha+\beta)}\Rightarrow۱+\tan^۲(\alpha+\beta)=\frac{۱}{\frac{۹}{۲۵}}=\frac{۲۵}{۹}$$

$$\Rightarrow\tan^۲(\alpha+\beta)=\frac{۱۶}{۹}\Rightarrow\tan(\alpha+\beta)=\pm\frac{۴}{۳}\xrightarrow{۰<\alpha+\beta<\frac{\pi}{۲}}\tan(\alpha+\beta)=\frac{۴}{۳}$$

$$۲\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\Rightarrow\tan۲\alpha=\tan((\alpha+\beta)+(\alpha-\beta))$$

$$=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{۱-\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}=\frac{\frac{۴}{۳}+\frac{۵}{۱۲}}{۱-\frac{۴}{۳}\times\frac{۵}{۱۲}}=\frac{\frac{۲۱}{۱۲}}{۱-\frac{۵}{۹}}=\frac{\frac{۲۱}{۱۲}}{\frac{۴}{۹}}=\frac{۲۱\times۹}{۴\times۱۲}=\frac{۲۱\times۳}{۴\times۴}=\frac{۶۳}{۱۶}$$

$$\tan(۲\beta)=\tan((\alpha+\beta)-(\alpha-\beta))=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan(\alpha-\beta)}{۱+\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{\frac{۴}{۳}-\frac{۵}{۱۲}}{۱+\frac{۴}{۳}\times\frac{۵}{۱۲}}=\frac{\frac{۱۱}{۱۲}}{۱+\frac{۵}{۹}}=\frac{\frac{۱۱}{۱۲}}{\frac{۱۴}{۹}}=\frac{۹۹}{۱۶۸}$$

سخت

۱۹ - طبق فرض $\tan x\tan y=۳$ داریم:

حسابان 2 تشریحی سطح 2

$$\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin y}{\cos y}=۳\Rightarrow\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cdot\cos y}=۳$$

$$\xrightarrow[\sin x\sin y=\frac{۳}{۴}]{\text{طبق فرض}}\frac{\frac{۳}{۴}}{\cos x\cos y}=۳\Rightarrow\cos x\cos y=\frac{۱}{۴}$$

با باز کردن عبارت $\cos(x-y)$ داریم:

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y=\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}=۱$$

حال طبق رابطهٔ $۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$ داریم:

$$۱+\tan^{۲}(x-y)=\frac{۱}{\cos^{۲}(x-y)}\quad\Rightarrow ۱+\tan^{۲}(x-y)=۱\quad\Rightarrow\tan(x-y)=۰$$

سخت

۲۰-

$$\tan\beta=\tan((\alpha+\frac{\beta}{۲})-(\alpha-\frac{\beta}{۲}))=\frac{\tan(\alpha+\frac{\beta}{۲})-\tan(\alpha-\frac{\beta}{۲})}{۱+\tan(\alpha+\frac{\beta}{۲})\tan(\alpha-\frac{\beta}{۲})}$$

$$=\frac{\sqrt{۳}+۱-(\sqrt{۳}-۱)}{۱+(\sqrt{۳}+۱)(\sqrt{۳}-۱)}=\frac{۲}{۱+(۳-۱)}=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow\tan ۲\beta=\frac{۲\tan\beta}{۱-\tan^{۲}\beta}=\frac{\frac{۴}{۳}}{۱-\frac{۴}{۹}}=\frac{\frac{۴}{۳}}{\frac{۵}{۹}}=\frac{۱۲}{۵}$$

سخت