نام آزمون: هندسه ۳ تشریحی سطح ۱

افشار

مرکز مشاوره تحصیلی دکتر علیرضا افشار

۱ - اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ مقادیر α و β را طوری بیابید که داشته باشیم.

$$A^{۲} = \alpha A + \beta I$$

۲ - اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض باشد، حاصل $A^{۳}$ را به‌دست آورید.

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳ - دترمینان ماتریس زیر را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

۴ - اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و $a_{۱۱} = ۴$ در این‌صورت $|A|$ را بیابید.

۵ - اگر $A = [a_{ij}]_{۳\times۲}$ به‌صورت زیر معرفی شده باشد ماتریس A را بیابید.

$$a_{ij} = \begin{cases} i^{۲} - ۱ & i = j \\ i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases}$$

۶ - اگر $\begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & x \\ x & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۸$ باشد مقدار x را به‌دست آورید.

۷ - با استفاده از تعریف وارون یک ماتریس ثابت کنید.

$$|A| \neq ۰$$

۸ - اگر $B = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & x \end{bmatrix}$ و $B^{-۱} = B^{۲}$ باشد، مقدار x چقدر است؟

۹ - در یک بیضی مساحت مثلث متساوی‌الساقینی که رأس آن کانون F و قاعده آن کوتاه‌ترین وتر کانونی F' است را به‌دست آوردید.

۱۰ - معادلهٔ $y^{۲} = ۶x$ مربوط به چه شکلی است؟ آن را مشخص نمایید.

۱۱ - معادلهٔ وتر مشترک سهمی‌های $x + y^{۲} = ۰$ و $y^{۲} = x + ۲y$ را به دست آورید.

۱۲ - معادلهٔ سهمی را بنویسید که کانون آن $F(۲,۳)$ و خط $x = ۴$ هادی آن باشد.

۱۳ - نوع مقطع مخروطی زیر را تعیین کنید:

$$x^{۲} + y^{۲} - ۶x + ۴y - ۳ = ۰$$

۱۴ - ثابت کنید در دو بیضی دورترین و نزدیکترین نقاط روی بیضی از کانون‌ها برابر است با: $a + c$ و $a - c$.

۱۵ - در سهمی $۴y^{۲} + ۴y - ۲x - ۱ = ۰$، مختصات کانون و رأس و معادله خط هادی را بیابید.

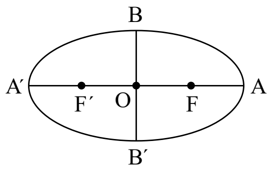
۱۶ - ضلع BC و مساحت مثلث ABC معلومند. مکان هندسی رأس A را بیابید.

۱۷ - مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را بیابید که از A و B می گذرند؟

۱۸ - اگر $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ به‌صورت $a_{ij} = \begin{cases} i \cdot j & i > j \\ i^{۲} & i = j \\ ۲i - j & i < j \end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $۲A - ۳I$ را به‌دست آورید.

۱۹ - اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $|A| = -۲$ حاصل $||A| \cdot A|$ را بیابید.

۲۰ - اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازهٔ زاویهٔ $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟



پاسخنامه تشریحی

۱ -

$A^{۲} = \alpha A + \beta I$

$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ & ۱۰ \\ ۱۵ & ۲۲ \end{bmatrix}$

$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha & ۲\alpha \\ ۳\alpha & ۴\alpha \end{bmatrix}$ ، $\beta I = \begin{bmatrix} \beta & ۰ \\ ۰ & \beta \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} ۷ & ۱۰ \\ ۱۵ & ۲۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & ۲\alpha \\ ۳\alpha & ۴\alpha+\beta \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \alpha = ۵ \\ \beta = ۲ \end{matrix}$

آسان

۲ -

$A^{۲} = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۶ \end{bmatrix}$

$A^{۳} = A^{۲}A = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲۷ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۶۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-۲)^{۳} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳^{۳} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴^{۳} \end{bmatrix}$

نتیجه می‌گیریم اگر $A = \begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$ آنگاه داریم: $A^{n} = \begin{bmatrix} a^{n} & ۰ & ۰ \\ ۰ & b^{n} & ۰ \\ ۰ & ۰ & c^{n} \end{bmatrix}$

متوسط

۳ -

$$\left|A\right| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right|$$

$\Rightarrow |A| = \underbrace{(۴ - ۹ - ۸)}_{-۱۳} - \underbrace{(۳ - ۱۲ - ۸)}_{-۱۷} = ۴$

آسان

۴ - می‌دانیم ماتریس اسکالر ماتریسی قطری است که درایه‌ها یکسان هستند.

$a_{۱۱} = ۴$

بنابراین داریم:

$|A| = \begin{vmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{vmatrix} = ۶۴$

آسان

۵ -

$A = [a_{ij}]_{۳\times۲} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$

آسان

۶ - دترمینان را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$۰ - ۱\begin{vmatrix} ۱ & x \\ x & ۱ \end{vmatrix} + ۰ = ۸ \rightarrow -(۱ - x^{۲}) = ۸ \rightarrow x^{۲} - ۱ = ۸$

$\rightarrow x^{۲} = ۹ \rightarrow x = \pm ۳$

آسان

۷ -

$AA^{-۱} = I \rightarrow |A|\left|A^{-۱}\right| = ۱ \neq ۰$

پس $|A|$ و $\left|A^{-۱}\right|$ نمی‌توانند صفر باشند.

بنابراین: $|A| \neq 0$

آسان

۸ -

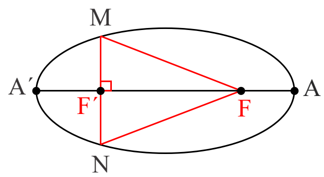
$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x \end{bmatrix} \to B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -x \\ x & x^2-1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = B^2 \to \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -x \\ x & x^2-1 \end{bmatrix} \to x = -1$$

آسان

۹ -

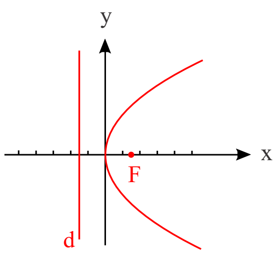


$$S_{\overset{\triangle}{FMN}} = \frac{1}{2} \times FF' \times MN = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}c \times \frac{2b^2}{a}$$
$$= 2 \times \frac{c}{a} \times b^2 = 2eb^2$$

آسان

۱۰ -

این معادله یک سهمی است که دهانهٔ آن رو به راست است و محور آن محور xهاست با قرار دادن $4a = 6$ داریم $a = \frac{3}{2}$. لذا کانون آن $F(\frac{3}{2}, 0)$ و خط هادی آن موازی محور yها و به معادلهٔ $x = -\frac{3}{2}$ است و رأس آن مبدا مختصات است.



متوسط

۱۱ - برای تعیین معادلهٔ وتر مشترک دو سهمی متقاطع، از دستگاه معادلات آن‌ها جمله درجه ۲ را حذف می‌کنیم.

$$\left.\begin{matrix} x + y^2 = 0 \\ y^2 = x + 2y \end{matrix}\right\} \to \left\{\begin{matrix} y^2 = -x \\ y^2 = x + 2y \end{matrix}\right. \to -x = x + 2y \to 2x + 2y = 0 \to x + y = 0$$

متوسط

۱۲ -

$$\begin{cases} \text{خط هادی} : x = 4 \\ \text{کانون} : F(2,3) \end{cases}$$

می‌دانیم که فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر با $2a$ می‌باشد. داریم:

$$\text{فاصله } F(2,3) \text{ تا } x - 4 = 0 \;= 2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

سهمی افقی است چون هادی آن $x = 4$ می‌باشد و دهانهٔ آن به سمت چپ باز می‌شود.

$$\text{رأس سهمی} : S(2+1, 3) = (3,3)$$
$$\text{معادلهٔ سهمی} : -4 \times 1(x-3) = (y-3)^2 \Rightarrow (y-3)^2 = -4(x-3)$$

متوسط

۱۳ -

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) - 3 = 0$$

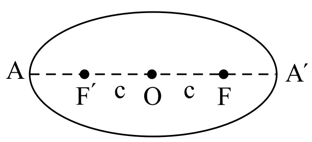
$$(x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$$

پس مقطع مخروطی دایره‌ای به شعاع ۴ و مرکز $O(3, -2)$ می‌باشد.

آسان

۱۴ - مطابق شکل، AF دورترین و $A'F$ نزدیکترین نقاط بیضی از کانون‌ها هستند. داریم:



$$AA' = 2a \Rightarrow OA = OA' = a \Rightarrow AF' = A'F = a - c$$
$$\Rightarrow AF = AF' + F'F \xlongequal{AF' = a-c \text{ و } FF' = 2c} a - c = a + c$$

هندسه 3 تشریحی سطح 1

متوسط

۱۵ -

$$4y^2+4y=2x+1 \Rightarrow y^2+y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$$

$$(y+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \Rightarrow (y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x+1)$$

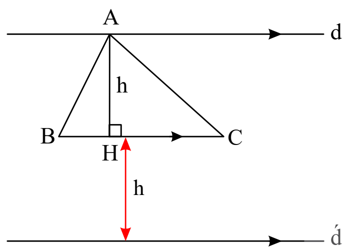
راس سهمی : $S(-1,-\frac{1}{2})$ و $2a=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{4}$

کانون سهمی : $F(-1+\frac{1}{4},-\frac{1}{2})$

معادلهٔ خط هادی : $x=-1-\frac{1}{4}=-\frac{5}{4}$

متوسط

۱۶ -



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}AH\times BC \Rightarrow h=AH=\frac{2S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{BC}=\text{معلوم}$$

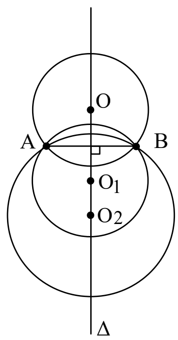
پس مکان هندسی A دو خط d موازی با BC و به فاصلهٔ AH (h معلوم) از آن می‌باشد.

متوسط

۱۷ - اگر O، O_1 و O_2 مراکز دایره‌هایی باشند که بر AB می‌گذرند:

$$\begin{cases} OA=OB \\ O_1A=O_1B \\ O_2A=O_2B \end{cases}$$

پس طبق ویژگی مکان هندسی، مکان هندسی مراکز این دایره‌ها، خط Δ عمودمنصف AB می‌باشد.



آسان

۱۸ -

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

$$2A-3I=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 4 & 8 & 2\\ 6 & 12 & 18\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 4 & 5 & 2\\ 6 & 12 & 15\end{bmatrix}$$

متوسط

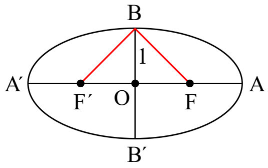
۱۹ -

$$||A|\cdot A|=|-2A|=(-2)^3|A|=-8\times(-2)=16$$

متوسط

۲۰ -

هندسه 3 تشریحی سطح 1



$$a = ۲b \rightarrow c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۴b^۲ - b^۲ = ۳b^۲ \rightarrow c = \sqrt{۳}b$$

$$\tan B_۱ = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{۳}b}{b} = \sqrt{۳} \rightarrow B_۱ = ۶۰^\circ \rightarrow F\hat{B}F' = ۲ \times ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

متوسط