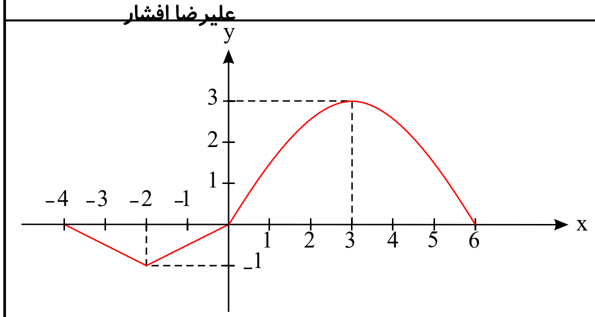
نام آزمون: حسابان ۲ تشریحی سطح ۱

مرکز مشاوره تحصیلی دکتر علیرضا افشار

۱ – نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است، نمودار تابع $y=f(۲x)$ را رسم کنید.



۲ – نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=\sqrt[۳]{x+۲}$

ب) $y=\sqrt[۳]{x}-۲$

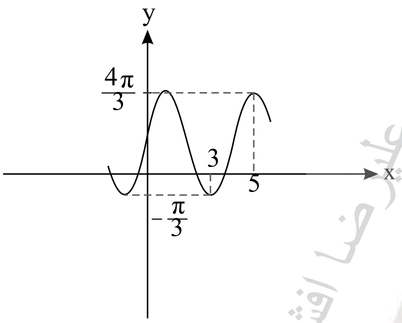
۳ – باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^۳+x^۲-۶$ بر $x+۲$ را بیابید.

۴ – معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲\cos ۲x-\sqrt{۳}=۰$

ب) $۲\cos ۳x+۱=۰$

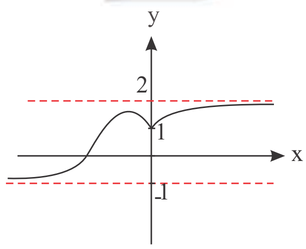
۵ – نمودار تابع $f(x)=a\sin bx+c$ بصورت زیر است، ضابطهٔ تابع را بیابید.



۶ – نمودار تابع f به‌صورت مقابل است، حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$



۷ – حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(۲x^۳-x^۲+۴)$

ب) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-x^۴+۲x^۳+۷)$

۸ – حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^۲(x+۱)^۵+x^۴}{(۲x-۱)^۳(x^۲+۱)^۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x}+۱)^۲(x^۲+۲)^۲}{(۲-x)^۵}$

۹ – مجانب‌های افقی تابع $f(x)=\dfrac{۳x+۲}{\sqrt{x^۲+۴}}$ را بیابید.

مرکز مشاوره ی دکتر علیرضا افشار

مرکز مشاوره ی دکتر علیرضا افشار

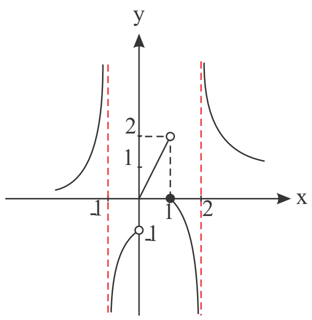
۱۰ - اگر خط $y=-3$ مجانب افقی تابع $f(x)=\dfrac{mx-|x+2|}{|2x+1|}$ در $+\infty$ باشد، m را بیابید.

۱۱ - مجانب افقی تابع $f(x)=(2x-1)\sin(\dfrac{1}{x})$ را بیابید.

۱۲ - نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to 1^-} fof(x)$ د) $\lim\limits_{x\to 0^-} fof(x)$



۱۳ - مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-9}$ را بیابید.

۱۴ - نمودار تابع $f(x)=\dfrac{1-x}{x-3}$ را در اطراف مجانب قائم خود رسم کنید.

۱۵ - تابع $f(x)=\dfrac{x^2+mx+8}{x-2}$ مفروض است. m را چنان بیابید که تابع مجانب قائم نداشته باشد.

۱۶ - مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای x^3+ax^2+bx+1 بر $x-2$ و $x+1$ بخش‌پذیر باشد.

۱۷ - مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازهٔ دو ضلع آن به‌ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

۱۸ - نمودار تابعی را رسم کنید که دامنهٔ آن $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.

۱۹ - دورهٔ تناوب، ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=5\sin(6x)-7$ ب) $g(x)=\dfrac{1}{2}\cos(3x)+4$

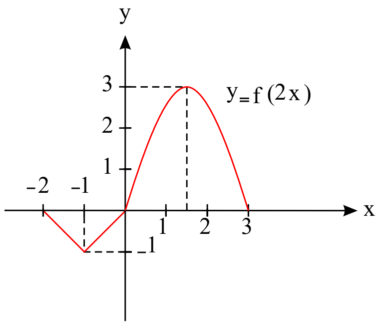
۲۰ - الف) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a)\le f(b)$ نشان دهید که $a\ge b$.

ب) اگر $\dfrac{1}{64}\le(\dfrac{1}{2})^{3x-2}$، حدود x را به‌دست آورید.

مرکز مشاوره دکتر علیرضا افشار

پاسخنامه تشریحی

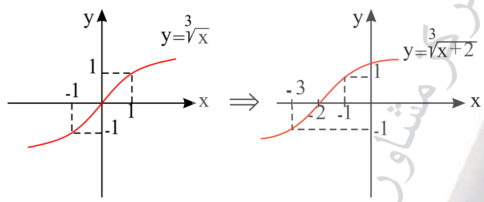
۱ - برای رسم $y=f(۲x)$، در نمودار $y=f(x)$ باید طول نقاط را بر ۲ تقسیم کنیم.



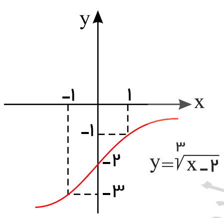
آسان

۲ -

الف) برای رسم $y=\sqrt[۳]{x+۲}$ باید نمودار $y=\sqrt[۳]{x}$ را ۲ واحد به چپ منتقل کنیم.



ب) برای رسم $y=\sqrt[۳]{x}-۲$ باید نمودار $y=\sqrt[۳]{x}$ را ۲ واحد به پایین منتقل کنیم.



آسان

۳ - باید ریشهٔ مقسوم‌علیه را در مقسوم قرار دهیم.

$$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \Rightarrow \text{باقی‌مانده } r = f(-۲) = (-۲)^۳ + (-۲)^۲ - ۶$$
$$\Rightarrow f(-۲) = -۸+۴-۶ = -۱۰ \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = -۱۰$$

آسان

۴ -

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = ۲k\pi \pm v$

الف) $۲\cos ۲x - \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow \cos ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos\frac{\pi}{۶}$

$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۱۲}$$

ب) $۲\cos ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos ۳x = -\frac{۱}{۲} = -\cos\frac{\pi}{۳} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۳})$

$$\Rightarrow \cos ۳x = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \pm \frac{۲\pi}{۹}$$

آسان

۵ - تفاضل طول دو نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دورهٔ تناوب است، پس:

$$\frac{T}{۲} = ۵-۳ \Rightarrow T = ۴ \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = ۴ \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{۲} \xrightarrow{b>۰} b = \frac{\pi}{۲}$$

$$\left.\begin{matrix} max\ f = |a| + c = \frac{۴\pi}{۳} \\ min\ f = -|a| + c = -\frac{\pi}{۳} \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۲c = \pi \Rightarrow c = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow |a| = \frac{۴\pi}{۳} - \frac{\pi}{۲} = \frac{۵\pi}{۶}$$

$$a > ۰ \Rightarrow a = \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow f(x) = \frac{۵\pi}{۶}\sin(\frac{\pi}{۲}x) + \frac{\pi}{۲}$$

متوسط

۶ -

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ۲$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -۱$

آسان

۷ - حد هر چند جمله‌ای در $x \to \pm\infty$ برابر با حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است.

الف) $$\lim_{x\to\pm\infty}(۲x^۳ - x^۲ + ۴) = \lim_{x\to\pm\infty} ۲x^۳ = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} ۲x^۳ = ۲(+\infty)^۳ = ۲(+\infty) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} ۲x^۳ = ۲(-\infty)^۳ = ۲(-\infty) = -\infty \end{cases}$$

ب) $$\lim_{x\to\pm\infty}(-x^۴ + ۲x^۳ + ۷) = \lim_{x\to\pm\infty}(-x^۴) = -(\pm\infty)^۴ = -(+\infty) = -\infty$$

آسان

۸ -

الف) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲(x+۱)^۵ + x^۴}{(۲x-۱)^۳(x^۲+۱)^۲} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲\times x^۵}{(۲x)^۳\times(x^۲)^۲}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۷}{۸x^۳\times x^۴} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۷}{۸x^۷} = \frac{۱}{۸}$$

ب) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x}+۱)^۲(x^۲+۲)^۲}{(۲-x)^۵} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x})^۲(x^۲)^۲}{(-x)^۵} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\times x^۴}{-x^۵} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^۵}{-x^۵} = -۱$$

متوسط

۹ -

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x+۲}{\sqrt{x^۲+۴}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x}{\sqrt{x^۲}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x}{|x|} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۳x}{x} = ۳ \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۳x}{-x} = -۳ \end{cases}$$

متوسط

۱۰ -

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{mx - \overbrace{|x+۲|}^{\text{مثبت}}}{\underbrace{|۲x+۱|}_{\text{مثبت}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{mx-(x+۲)}{۲x+۱} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(m-۱)x}{۲x}$$

$$= \frac{m-۱}{۲} = -۳ \Rightarrow m-۱ = -۶ \Rightarrow m = -۵$$

متوسط

۱۱ -

هر وقت زاویهٔ سینوس به صفر میل کند، داریم: $\sin u \underset{u\to ۰}{\sim} u$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(۲x-۱)\sin(\frac{۱}{x}) = \lim_{x\to\pm\infty}(۲x-۱)\times\frac{۱}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x-۱}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x}{x} = ۲$$

خط $y = ۲$ مجانب افقی تابع است.

متوسط

۱۲ -

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = +\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x) = -\infty$

ج) $$\lim_{x\to ۱^-} fof(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(f(x)) = f(۲^-) = \lim_{x\to ۲^-} f(x) = -\infty$$

د) $$\lim_{x\to ۰^-} fof(x) = \lim_{x\to ۰^-} f(f(x)) = f((-۱)^-) = \lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = +\infty$$

متوسط

۱۳ -

$$f(x) = \frac{x+۲}{x^۲-۹}\ ,\quad x^۲ - ۹ = ۰ \Rightarrow x = \pm۳$$

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{x+۲}{(x-۳)(x+۳)} = \frac{۳+۲}{(۳-\varepsilon-۳)\times ۶} = \frac{۵}{-۶\varepsilon} = \frac{۵}{۰^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x+2}{(x-3)(x+3)}=\frac{3+2}{(3+\varepsilon-3)\times 6}=\frac{5}{+6\varepsilon}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to(-3)^-}\frac{x+2}{(x-3)(x+3)}=\frac{-3+2}{-6(-3-\varepsilon+3)}=\frac{-1}{+6\varepsilon}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to(-3)^+}\frac{x+2}{(x-3)(x+3)}=\frac{-3+2}{-6(-3+\varepsilon+3)}=\frac{-1}{-6\varepsilon}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

خطوط $x=\pm 3$ مجانب‌های قائم تابع هستند.

آسان

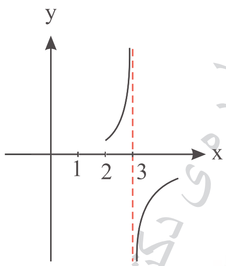
۱۴ -

$$f(x)=\frac{1-x}{x-3}\,,\ x-3=0\Rightarrow x=3$$

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to 3^-}\frac{1-x}{x-3}=\frac{1-3}{3-\varepsilon-3}=\frac{-2}{-\varepsilon}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to 3^+}\frac{1-x}{x-3}=\frac{1-3}{3+\varepsilon-3}=\frac{-2}{+\varepsilon}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

نمودار تابع در اطراف خط $x=3$ به‌صورت مقابل است.



آسان

۱۵ - برای این که این تابع مجانب قائم نداشته باشد، باید صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد، پس داریم:

$$f(x)=\frac{x^2+mx+8}{x-2}$$

$$x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow x^2+mx+8=0\Rightarrow 4+2m+8=0\Rightarrow m=-6$$

$$f(x)=\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=x-4\ ,\ D_f=\mathbb{R}-\{2\}$$

تابع مجانب قائم ندارد.

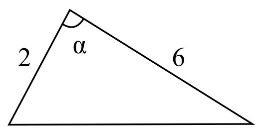
متوسط

۱۶ -

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$$
$$x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow r=f(2)=0\Rightarrow 2^3+a\times 2^2+b\times 2+1=0$$
$$\Rightarrow 8+4a+2b+1=0\Rightarrow 4a+2b=-9\quad(1)$$
$$x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow r=f(-1)=0\Rightarrow(-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+1=0$$
$$\Rightarrow -1+a-b+1=0\Rightarrow a-b=0\Rightarrow a=b$$
$$\xrightarrow{(1)}4a+2a=-9\Rightarrow a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=b=-\frac{3}{2}$$

متوسط

۱۷ - مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع، پس داریم:



$$S=\frac{1}{2}\times 2\times 6\sin\alpha=3\Rightarrow\sin\alpha=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{6}\ (1)\ ,\ \alpha=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\ (2)$$

با توجه به اینکه زاویهٔ مثلث بین صفر تا 180° می‌باشد، داریم:

مرکز مشاوره ی دکتر علیرضا افشار

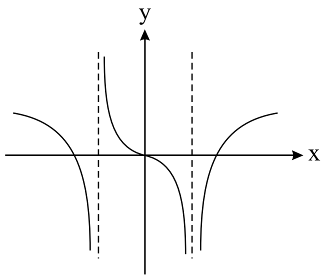
$$(۱)\ k = ۰ \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۶}\ ,\ (۲)\ k = ۰ \Rightarrow \alpha = \frac{۵\pi}{۶}$$

بنابراین دو مثلث با این خاصیت وجود دارد.

متوسط

۱۸ -

تابع مقابل در $x = -۱$ و $x = ۱$ مجانب قائم دارد.



آسان

۱۹ - در توابعی به فرم $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ داریم:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|}\ ,\ max = |a| + c\ ,\ min = -|a| + c$$

الف) $f(x) = ۵\sin(۶x) - ۷ \rightarrow T = \frac{۲\pi}{۶} = \frac{\pi}{۳}$

$$max\ f = |۵| - ۷ = -۲\ ,\ min\ f = -|۵| - ۷ = -۱۲$$

ب) $g(x) = \frac{۱}{۲}\cos(۳x) + ۴ \rightarrow T = \frac{۲\pi}{۳}$

$$max\ g = |\frac{۱}{۲}| + ۴ = \frac{۹}{۲} \qquad min\ g = -|\frac{۱}{۲}| + ۴ = -\frac{۱}{۲} + ۴ = \frac{۷}{۲}$$

آسان

۲۰ - الف)

برهان خلف: اگر $a \geq b$ برقرار نباشد، آن‌گاه $a < b$ است و چون f اکیداً نزولی است، داریم:

$$a < b \xrightarrow{f\ \text{اکیداً نزولی}} f(a) > f(b)$$

نتیجهٔ $f(a) > f(b)$ خلاف فرض است، زیرا طبق فرض $f(a) \leq f(b)$ است، پس باید $a \geq b$ باشد.

ب)

می‌دانیم تابع $f(x) = (\frac{۱}{۲})^x$ اکیداً نزولی است، یعنی برای دو مقدار a و b داریم:

$$(\frac{۱}{۲})^a \leq (\frac{۱}{۲})^b \Rightarrow a \geq b$$

حال برای حل نامعادلهٔ داده شده داریم:

$$(\frac{۱}{۲})^{۳x-۲} \leq \frac{۱}{۶۴} \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^{۳x-۲} \leq (\frac{۱}{۲})^{۶} \Rightarrow ۳x - ۲ \geq ۶ \Rightarrow x \geq \frac{۸}{۳}$$

متوسط

مرکز مشاوره ی دکتر علیرضا افشار