

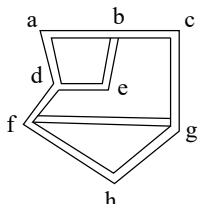
نام آزمون: ریاضیات گسسته تشریحی سطح ۱

افشار

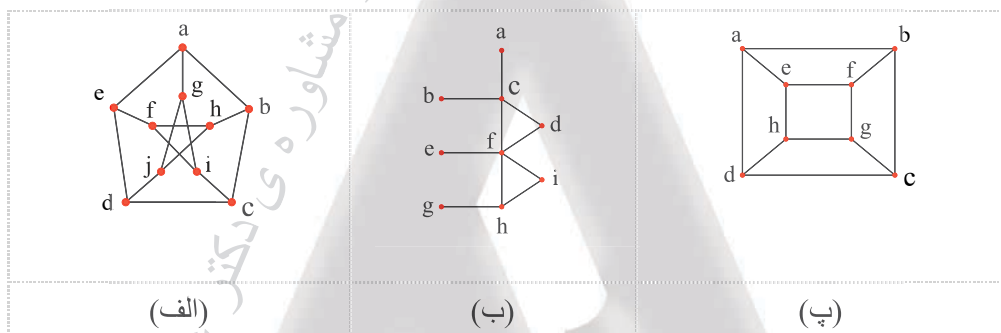
مرکز مشاوره تحصیلی دکتر

علیرضا افشار

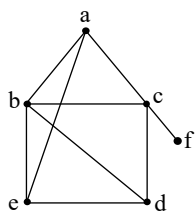
۱- شکل مقابل منطقه‌ای از یک شهر است. قرار است در برخی از تقاطع‌های این شهر دستگاه‌های خودپرداز به گونه‌ای نصب شود که اولاً: برای راحتی شهروندان دستگاه‌ها به گونه‌ای نصب شوند که هر فرد در هر تقاطعی که قرار گرفته باشد، یا در همان تقاطع به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد یا حداکثر با رفتن به یک تقاطع مجاور به دستگاه خودپرداز دسترسی پیدا کند. ثانیاً: به جهت صرفه‌جویی در هزینه‌ها با کمترین تعداد دستگاه خودپرداز ممکن این کار صورت بگیرد. خودپردازها را در کدام تقاطع‌ها قرار دهیم؟



۲- عدد احاطه‌گری گراف‌های زیر را بیابید.



۳- گراف  $G = (V, E)$  به صورت مقابل رسم شده است. مجموعه‌های  $V$  و  $E$  را مشخص کنید. درجه رأس‌ها و بیشترین و کمترین درجه رأس‌ها را بنویسید. مجموعه همسایگی باز رأس‌ها را بنویسید.



۴- ۵ تیم فوتبال  $a, b, c, d, e$  در یک گروه قرار دارند و تیم‌ها دو به دو باهم بازی می‌کنند. در مورد بازی‌های انجام شده اطلاعات زیر را داریم:

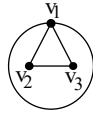
تیم  $a$  تیم‌های  $b, e$  را برده است. تیم  $b$  به تیم‌های  $a, c$  باخته است. تیم  $c$  از تیم  $d$  شکست خورده است ولی تیم  $b$  را برده است.

تیم  $d$  نیز ۲ تیم  $c, e$  را برده است. تیم  $e$  به تیم  $a$  باخته و تیم  $c$  را شکست داده است. گراف جهت دار اطلاعات فوق را رسم کنید و اگر برای هر برد ۳ امتیاز در نظر بگیریم مشخص کنید که:

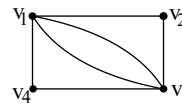
الف) تیم  $a$  با کدام تیم‌ها بازی نکرده است.

ب) امتیاز تیم‌ها را بنویسید.

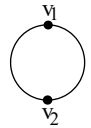
۵- از گراف های زیر کدام ساده است؟



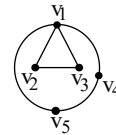
(الف)



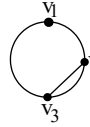
(ب)



(ج)



(د)



(ه)

۶- یک گراف کامل دارای ۵۵ یال است. درجه هر رأس را بیابید.

۷-  $G$  گرافی ساده از مرتبه ۶ می باشد که مجموع درجات رأس های آن ۱۴ است. مجموع درجات رأس های  $\bar{G}$  کدام است؟

۸- بزرگ ترین مقدار  $x$  را بیابید به طوری که  $x$  هر دو عدد  $4 - 7n$  و  $3 + 5n$  را بشمارد.

۹- به ازای چند عدد صحیح از  $n$  رابطه  $5 + 7n \mid n + 1$  برقرار است؟

۱۰- ثابت کنید کوچکترین عدد حقیقی مثبت وجود ندارد.

۱۱- (الف) یک گراف ۶ رأسی که  $\gamma$ -مجموعه آن با اندازه یک باشد رسم کنید.

(ب) یک گراف ۶ رأسی که  $\gamma$ -مجموعه آن با اندازه دو باشد رسم کنید.

(پ) فرض کنید  $n$  و  $k$  دو عدد طبیعی باشند و  $k \leq n$ . روشی برای رسم یک گراف  $n$  رأسی که عدد احاطه گری آن  $k$  باشد، ارائه دهید.

۱۲- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو عدد گنگ باشند ولی  $\alpha + \beta$  گویا باشد، ثابت کنید  $\alpha - \beta$  و  $\alpha + 2\beta$  گنگ هستند.

۱۳- گزاره های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آن ها را رد کنید.

(الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

(ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

۱۴- فرض می کنیم  $ab = cd$ ،  $a, b, c, d$  اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطه عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

۱۵- ثابت کنید: اگر  $a \mid b$  آنگاه  $a \mid -b$  و  $a \mid b$  و  $a \mid -a$ .

۱۶- اگر باقی مانده تقسیم عدد  $a$  بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی مانده تقسیم عدد  $a$  بر ۵۶ بیابید.

۱۷- اگر  $a$  عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح  $a$  یا  $a + 2$  یا  $a + 4$  بر ۳ بخش پذیر است.

۱۸- اگر  $a \equiv b \pmod{m}$  و  $n \mid m$  ثابت کنید  $a \equiv b \pmod{n}$ .

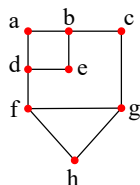
۱۹- اگر اول مهرماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۲۰- به چند طریق می توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

## پاسخنامه تشریحی

۱ -

گراف معادل این منطقه این گونه است:

اگر خودپردازها را در رئوس  $f$ ,  $b$  نصب کنیم به هدف رسیده ایم. توجه شود که مجموعه  $A = \{b, f\}$  یک مجموعه احاطه گر است.

متوسط

۲ - الف) مجموعه  $A = \{a, i, j\}$  یک مجموعه احاطه گر برای گراف است که کمترین عضو را دارد. پس

$$\gamma(G) = 3$$

ب) مجموعه  $A = \{c, e, h\}$  یک مجموعه احاطه گر برای گراف است که کمترین عضو را دارد. پس:

$$\gamma(G) = 3$$

پ)  $A = \{a, g\}$  یک مجموعه احاطه گر مینیمم برای گراف است پس:

$$\gamma(G) = 2$$

متوسط

۳ -

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$E = \{ab, ac, ae, bc, be, bd, cd, cf, de\}$$

$$\deg a = 3$$

$$\deg b = 4$$

$$\deg c = 4 \quad \Delta = 4, \delta = 1$$

$$\deg d = 3$$

$$\deg e = 3$$

$$\deg f = 1$$

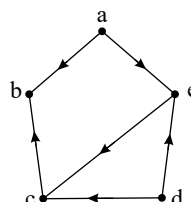
$$N_G(a) = \{b, c, e\}, \quad N_G(b) = \{a, c, d, e\}$$

$$N_G(c) = \{a, b, d, f\}, \quad N_G(d) = \{b, c, e\}$$

$$N_G(e) = \{a, b, d\}, \quad N_G(f) = \{c\}$$

آسان

۴ -

تیم  $a$  با تیم های  $d$  و  $c$  بازی نکرده است.

۱ امتیاز

۲ امتیاز

۳ امتیاز

۴ امتیاز

۵ امتیاز

آسان

۵ - الف - ساده نیست زیرا بین ۲ رأس  $v_1$  و  $v_2$  بیش از یک یال رسم شده است.ب - ساده نیست زیرا بین ۲ رأس  $v_1$  و  $v_2$  بیش از یک یال رسم شده است.ج - ساده نیست زیرا در رأس  $v_1$  طوقه وجود دارد.د - ساده نیست زیرا بین ۲ رأس  $v_2$  و  $v_3$  بیش از یک یال رسم شده است.

ه - گراف ساده است.

متوسط

- ۶

$$q = \frac{p(p-1)}{2} \rightarrow 55 = \frac{p(p-1)}{2} \rightarrow p(p-1) = 110 = 11 \times 10 \rightarrow p = 11$$

گراف کامل مرتبه ۱۱ است، پس  $(11-1) = 10$  منتظم است. یعنی درجه هر رأس ۱۰ است.  
آسان

۷ -

$$\sum_{i=1}^6 \deg_G V_i + \sum_{i=1}^6 \deg_{\bar{G}} V_i = p(p-1) \rightarrow 14 + x = 6 \times 5 \Rightarrow x = 16$$

متوسط

- ۸

$$\left. \begin{array}{l} x | 7n - 4 \rightarrow x | 5(7n - 4) \\ x | 5n + 3 \rightarrow x | 7(5n + 3) \end{array} \right\} \Rightarrow x | 7(5n + 3) - 5(7n - 4) \rightarrow x | 41$$

بنابراین بیشترین مقدار  $x$ ، ۴۱ است.

متوسط

- ۹

$$\left. \begin{array}{l} n+1 | 7n+5 \\ n+1 | 7(n+1) \end{array} \right\} \Rightarrow n+1 | (7n+7) - (7n+5) \rightarrow n+1 | 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) n+1 = 2 \rightarrow n = 1 \\ 2) n+1 = -2 \rightarrow n = -3 \\ 3) n+1 = 1 \rightarrow n = 0 \\ 4) n+1 = -1 \rightarrow n = -2 \end{array} \right.$$

آسان

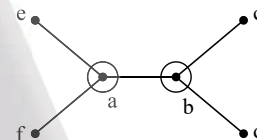
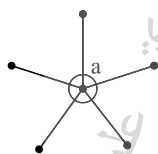
۱۰ - فرض کنید  $a$  کوچکترین عدد حقیقی مثبت باشد چون  $a > 0$  پس  $\frac{a}{2} < a < \frac{a}{2}$  یعنی عدد حقیقی مثبتی کوچکتر از  $a$  وجود دارد پس  $a$  کوچکترین عدد حقیقی مثبت نیست از این تناقض

نتیجه می گیریم کوچکترین عدد حقیقی مثبت وجود ندارد.

متوسط

- ۱۱

الف) مجموعه  $\{a\}$  مجموعه احاطه گر است:  $\gamma(G) = 1$



(ب)

مجموعه  $\{a, b\}$  مجموعه احاطه گر است.  $\gamma(G) = 2$  زیرا رأس های  $e$  و  $f$  درجه یک هستند و باید حتماً یکی از رأس های  $f$  و  $e$  و  $a$  در مجموعه احاطه گر باشند. رئوس  $c$  و  $d$  نیز درجه یک هستند. باید حتماً یکی از رئوس  $b$  و  $d$  و  $c$  در مجموعه احاطه گر باشد.

پ) هر گرافی با  $n$  رأس رسم کنیم عدد احاطه گری کوچک تر یا مساوی  $n$  خواهد بود. در گراف تهی عدد احاطه گری برابر  $n$  است اگر بخواهیم عدد احاطه گری  $k$  باشد کافی است  $k-1$  رأس را به صورت منفرد در نظر بگیریم و  $(k-1)$  رأس باقی مانده را به صورت گراف ستاره ای رسم کنیم در این صورت عدد احاطه گری  $k$  خواهد بود.

آسان

۱۲ - فرض کنیم بنابر برهان خلف  $\alpha - \beta$  گویا باشد (فرض خلف) از طرفی  $\alpha + \beta$  گویا است پس مجموع آن ها یعنی  $\alpha + \beta + \alpha - \beta = 2\alpha$  گویاست در نتیجه  $\alpha$  گویا است که با فرض در تناقض است پس  $\alpha - \beta$  گنگ است.

فرض کنیم بنابر برهان خلف  $\alpha + 2\beta$  گویا باشد (فرض خلف) از طرفی چون  $\alpha + \beta$  گویا است پس تفاضل آن ها یعنی  $\beta = \alpha + 2\beta - (\alpha + \beta)$  گویا است که با فرض در تناقض است پس  $\alpha + 2\beta$  گنگ است.

متوسط

۱۳ - اثبات این گزاره به صورت زیر است:

اگر  $2n-1$  که  $n \in \mathbb{Z}$  عدد فرد دلخواهی باشد آنگاه داریم:

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1 = 2q + 1 \rightarrow \text{فرد است.}$$

$$(2n+1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 = 2(4n^3 + 6n^2 + 3n) + 1 = 2q + 1 \rightarrow \text{فرد است.}$$

ب) فرض کنیم  $n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$  عدد طبیعی متوالی باشند، داریم:

$$\text{عدد وسطی} = \frac{5n+15}{5} = n+3 \rightarrow \text{میانگین اعداد}$$

بنابراین حکم برقرار است.

متوسط

- ۱۴

$$(۱) ab = (c)d \rightarrow d|ab \quad (۲) ab = c(d) \rightarrow c|ab$$

$$(۳) ab = cd(۱) \rightarrow cd|ab \quad (۴) cd = ab(۱) \rightarrow ab|cd$$

$$(۵) cd = (a)b \rightarrow b|cd \quad (۶); cd = a(b) \rightarrow a|cd$$

آسان

- ۱۵

$$a|b \rightarrow b = aq, q \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow b = (-a)(-q) \rightarrow -a|b$$

$$\Rightarrow -b = (-a)q = a(-q) \rightarrow -a|-b, a|-b$$

آسان

۱۶ - طبق فرض می توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} a &= 7k + 5 \quad (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{\times 8} 8a = 56k + 40 \\ a &= 8k' + 7 \quad (k' \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{\times 9} 9a = 72k' + 63 \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow a = 56k - 56k' - 9 \Rightarrow a = 56(k - k') - 9 \Rightarrow a = 56k'' - 9$$

$$\Rightarrow a = 56(\underbrace{k'' - 1}_q) + 56 - 9 \Rightarrow a = 56q + 47$$

بنابراین باقی مانده تقسیم  $a$  بر ۵۶ برابر ۴۷ می باشد.

آسان

- ۱۷

برای عدد صحیح و دلخواه  $a$  یکی از ۳ حالت زیر را داریم:

$$(۱) \text{ اگر } a = 3k \text{ آنگاه } 3|a$$

$$(۲) \text{ اگر } a = 3k + 1 \text{ آنگاه } 3|a + 1$$

$$(۳) \text{ اگر } a = 3k + 2 \text{ آنگاه } 3|a + 2$$

آسان

- ۱۸

$$a \equiv b \pmod{m} \rightarrow m|a - b$$

$$\left. \begin{aligned} m|a - b \\ n|m \end{aligned} \right\} \rightarrow n|a - b \rightarrow a \equiv b \pmod{n}$$

آسان

۱۹ - روزهای هفته دوره گردش هفت روزه دارند بنابراین اگر  $a \equiv b$  آن گاه  $a$ -امین و  $b$ -امین روز سال یکسان هستند اگر اول مهر  $x$ -امین و ۷ اسفند  $y$ -امین روز سال باشند داریم:

$$x = 6 \times 31 + 1 \equiv 5$$

$$y = 6 \times 31 + 5 \times 30 + 7 \equiv 7$$

بنابراین  $x$ -امین روز سال مانند ۵-امین روز سال و  $y$ -امین روز سال همانند هفتمین روز سال است. چون  $x$ -امین روز سال یکشنبه است پس پنجمین روز سال نیز یکشنبه است پس هفتمین روز سال

سه شنبه می باشد در نتیجه ۷ اسفند هم سه شنبه است.

متوسط

۲۰ - باید تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله سیاله خطی  $x + y = 9$  را بیابیم. صورت کلی جواب این معادله در مجموعه اعداد صحیح عبارت است از:

$$\begin{cases} x = k \\ y = 9 - k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

چون باید جواب های صحیح و نامنفی را بیابیم بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ 9 - k \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ k \leq 9 \end{cases} \rightarrow 0 \leq k \leq 9$$

پس به ازای ۱۰ مقدار از  $k$  جواب های صحیح و نامنفی برای معادله سیاله به دست می آید بنابراین این کار را به ۱۰ طریق می توان انجام داد.

متوسط