

نام آزمون: ریاضی و آمار ۳ تشریحی سطح ۱

افشار

مرکز مشاوره تحصیلی دکتر  
علیرضا افشار

۱- حاصل  $2! + 5!$  برابر ..... است.

۲-

$$\frac{P(n, r)}{\square} = C(n, r)$$

۳- مجموعه  $A = \{1, 3, 5, 8, 9\}$  مفروض است.

الف) چند زیر مجموعه ۴ عضوی از  $A$  می توان نوشت؟

ب) چند زیر مجموعه سه عضوی شامل ۳ می توان نوشت؟

ج) چند زیر مجموعه دو عضوی فاقد ۵ می توان نوشت؟

۴- پیشامد  $S$  را یک پیشامد ..... می نامیم.

۵- اگر  $A = \phi$  باشد مقدار  $P(A)$  برابر ..... است.

۶- احتمال اینکه فردا باران بیارد  $\frac{3}{5}$  است. احتمال اینکه فردا باران نیاید چقدر است؟

۷- گام اول چرخه آمار در حل مسائل را بیان کرده و به طور مختصر توضیح دهید

۸- در اندازه گیری سعی می کنیم تا حد ممکن اطلاعات ..... را به اطلاعات ..... تبدیل کنیم.

۹- چندمین جمله از دنباله  $a_n = \frac{2n+3}{5n}$  برابر  $\frac{1}{2}$  می باشد؟

۱۰- جمله پنجم دنباله های بازگشتی زیر را مشخص کنید.

الف)  $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$  ,  $a_1 = -2$

ب)  $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$  ,  $a_1 = 1$

ج)  $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$  و  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

د)  $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$  ,  $a_1 = 1$

۱۱- در دنباله  $a_n = 3n - 5$  بدون نوشتن جملات دنباله، مقدار اختلاف مشترک و جمله اول را به دست آورید.

۱۲- دنباله  $a_n = \frac{1}{4} + (x+3)n$  مفروض است، بررسی کنید در چه حالتی دنباله روند کاهشی، افزایشی و ثابت دارد.

۱۳- در دنباله حسابی  $-96, 000, -100, 000$  چند جمله کوچکتر از ۷ وجود دارد؟

۱۴- بین دو عدد ۱۷ و ۳۳ سه عدد به گونه ای درج کرده ایم که چهار عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی دهند، اختلاف مشترک را بیابید.

۱۵ - کدام یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام یک آزمایش قطعی است؟

(الف) نام ۲۰ دانش‌آموز را روی ۲۰ کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به‌طور تصادفی یک کارت بیرون می‌کشیم تا نام یکی از دانش‌آموزها استخراج شود.

(ب) مقداری آب را حرارت می‌دهیم تا به بخار تبدیل شود.

(پ) نتیجه یک آزمون چهارجوابی، که نیمی از سؤالات آن را شانسی پاسخ داده‌ایم.

(ت) در یک بازی ساده دو نفره، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می‌دهد.

- عددی را انتخاب می‌کند.

- سه واحد به آن عدد می‌افزاید.

- سپس حاصل را دو برابر می‌کند.

- از عدد حاصل ۲ واحد کم می‌کند.

- نتیجه به‌دست آمده را نصف می‌کند.

- از حاصل به‌دست آمده، عدد اولیه را کم می‌کند.

- در مرحله آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه‌کننده پاسخ را اعلام می‌کند.

۱۶ - با توجه به دنباله‌های  $a_n = 3^n$ ،  $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ،  $c_n = \frac{1}{3n-1}$ ،  $d_n = n^2 - 1$ ، حاصل عبارت‌های خواسته شده را به‌دست آورید.

(الف)  $a_2 + b_1$

(ب)  $c_2 - d_1$

(ج)  $b_2 + d_2$

۱۷ - یازدهمین جمله یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله نوزدهم آن ۹۲ است. جمله سی‌ام این دنباله را مشخص کنید.

۱۸ - براساس رابطه به‌دست آمده در مسئله ۶، سه عدد را به‌گونه‌ای میان اعداد ۱۰ و ۱۸ قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهند.

۱۹ - سه عدد را به‌گونه‌ای میان اعداد ۱۰ و ۱۸ قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهند.

۲۰ - دو تاس را پرتاب می‌کنیم. ابتدا هر یک از پیشامدهای زیر را نوشته، سپس احتمال هر کدام را محاسبه کنید.

(الف) مجموعه اعداد برآمده از دو تاس برابر ۱۰ باشد.

(ب) اعداد رو شده از هر دو تاس بر ۳ بخش‌پذیر باشند.

## پاسخنامه تشریحی

۱ -

$$۱۲۰ + ۲ = ۱۲۲$$

آسان

۲ -

 $r!$ 

متوسط

۳ -

الف)  $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$

ب)  $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$

ج)  $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$

متوسط

۴ - حتمی

آسان

۵ - صفر

آسان

۶ -

$P(A) = \frac{3}{5}$  و  $P(A') = ?$

باران نیارد      باران نیارد

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

آسان

۷ - گام اول: بیان مسئله است.

مسئله‌ای که در دنیای واقعی است به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم و با توجه به اهمیت موضوع و بودجه و زمان و سایر شرایط، جامعه آماری را محدود می‌کنیم.

آسان

۸ - کیفی - کمی

متوسط

۹ - با مساوی قرار دادن  $a_n$  با  $\frac{1}{3}$  مقدار  $n$  یا همان شماره جمله را می‌یابیم:

$$a_n = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2n+3}{5n} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 5n = 4n + 6 \rightarrow n = 6$$

آسان

۱۰ -

با جایگذاری اعداد طبیعی به جای  $m$ ، دنباله‌های بازگشتی را تا جمله پنجم ادامه می‌دهیم:

الف)  $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n \xrightarrow{n=1} a_2 = \frac{1}{3}a_1 \xrightarrow{a_1=-2} a_2 = \frac{1}{3}(-2) = -\frac{2}{3}$

$\xrightarrow{n=2} a_3 = \frac{1}{3}a_2 \xrightarrow{a_2=-\frac{2}{3}} a_3 = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{9}$

$\xrightarrow{n=3} a_4 = \frac{1}{3}a_3 \xrightarrow{a_3=-\frac{2}{9}} a_4 = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{2}{27}$

$\xrightarrow{n=4} a_5 = \frac{1}{3}a_4 \xrightarrow{a_4=-\frac{2}{27}} a_5 = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{27}\right) = -\frac{2}{81}$

ب)  $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \xrightarrow{n=1} a_2 = \frac{1}{1+a_1} \xrightarrow{a_1=1} a_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$$n=2 \rightarrow a_2 = \frac{1}{1+a_1} \xrightarrow{a_1=\frac{1}{2}} a_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$n=3 \rightarrow a_3 = \frac{1}{1+a_2} \xrightarrow{a_2=\frac{2}{3}} a_3 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$n=4 \rightarrow a_4 = \frac{1}{1+a_3} \xrightarrow{a_3=\frac{3}{5}} a_4 = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}$$

$$ج) a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \xrightarrow{n=1} a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$n=2 \rightarrow a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 1 + 3 = 5$$

$$د) a_{n+1} = a_n + (-1)^n \xrightarrow{n=1} a_2 = a_1 + (-1)^1 \xrightarrow{a_1=1} a_2 = 1 + (-1) = 0$$

$$n=2 \rightarrow a_3 = a_2 + (-1)^2 \xrightarrow{a_2=0} a_3 = 0 + 1 = 1$$

$$n=3 \rightarrow a_4 = a_3 + (-1)^3 \xrightarrow{a_3=1} a_4 = 1 + (-1) = 0$$

$$n=4 \rightarrow a_5 = a_4 + (-1)^4 \xrightarrow{a_4=0} a_5 = 0 + 1 = 1$$

آسان

۱۱ - فرمول کلی جمله عمومی دنباله‌ای به صورت:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + nd - d$$

در نتیجه ضریب  $n$  اختلاف مشترک و جمله فاقد  $n$  برابر  $a_1 - d$  است.بنابراین در  $a_n = 3n - 5$  داریم:

$$3n = dn \Rightarrow d = 3 \text{ (اختلاف مشترک)}$$

$$a_1 - d = -5 \Rightarrow a_1 - 3 = -5 \Rightarrow a_1 = -5 + 3 = -2 \text{ (جمله اول)}$$

متوسط

۱۲ - ضریب  $n$  در جمله عمومی شیب نمودار را نشان می‌دهد که مثبت بودن شیب به منزله افزایشی بودن و منفی بودن شیب به منزله کاهشی بودن دنباله است و صفر بودن شیب به منزله ثابت بودن آن است.

$$a_n = \frac{1}{4} + \underbrace{(x+3)}_{\text{شیب}} n$$

$$x+3 > 0 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow \text{دنباله روند افزایش دارد.}$$

$$x+3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow \text{دنباله روند ثابتی را طی می‌کند}$$

$$x+3 < 0 \Rightarrow x < -3 \Rightarrow \text{دنباله روند کاهشی دارد}$$

متوسط

۱۳ - در دنباله حسابی روبه‌رو جمله عمومی را می‌نویسیم:

$$-100, -96, \dots$$

$$a_1 = -100, \quad d = a_2 - a_1 = -96 - (-100) = -96 + 100 = 4$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = -100 + (n-1)4 = -100 + 4n - 4$$

$$\Rightarrow a_n = 4n - 104$$

اکنون می‌خواهیم تعداد جملات کوچک‌تر از ۷ را بدست آوریم، پس جمله عمومی دنباله را کوچک‌تر از ۷ قرار می‌دهیم.

$$a_n = 4n - 104 < 7$$

$$4n - 104 < 7 \Rightarrow 4n < 7 + 104 \Rightarrow 4n < 111 \Rightarrow n < \frac{111}{4}$$

$$n < 27.75$$

بنابراین ۲۷ جمله از دنباله فوق کوچک‌تر از ۷ هستند.

متوسط

۱۴ - اختلاف مشترک دنباله حسابی که  $m$  واسطه حسابی بین جملات  $a$  و  $b$  آن درج کرده‌ایم برابر است با:

$$d = \frac{b-a}{m+1}$$

پس با داشتن ۱۷ و ۳۳ داریم:

$$d = \frac{33-17}{3+1} = \frac{16}{4} = 4$$

اختلاف مشترک دنباله برابر است با: ۴.

آسان

۱۵ - الف) تصادفی ب) قطعی پ) تصادفی ت) قطعی  
آسان

۱۶ - با توجه به دنباله‌های روبه‌رو داریم:  $a_n = 3^n$  و  $b_n = (-\frac{1}{2})^{n+1}$  و  $c_n = \frac{1}{3n-1}$  و  $d_n = n^2 - 1$

الف) برای به‌دست آوردن عبارت زیر در دنباله  $b_n$  به جای  $n = 1$  و در دنباله  $a_n$  به جای  $n = 2$  قرار داده و حاصل را به‌دست می‌آوریم.

$$a_2 + b_1 = (3)^2 + (-\frac{1}{2})^{1+1} = 9 + (\frac{-1}{2})^2 = 9 + \frac{1}{4} = \frac{36+1}{4} = \frac{37}{4}$$

ب) برای به‌دست آوردن عبارت روبه‌رو در دنباله  $c_n$  به جای  $n = 2$  و در دنباله  $d_n$  به جای  $n = 1$  قرار داده و حاصل را به‌دست می‌آوریم.

$$c_2 - d_1 = \frac{1}{3(2)-1} - ((1)^2 - 1) = \frac{1}{6-1} - (1-1) = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

ج) برای به‌دست آوردن عبارت روبه‌رو در دنباله  $b_n$  به جای  $n = 4$  و در دنباله  $d_n$  به جای  $n = 2$  قرار داده و حاصل را به‌دست می‌آوریم.

$$b_4 + d_2 = (\frac{-1}{2})^{4+1} + ((2)^2 - 1) = (\frac{-1}{2})^5 + 3 = \frac{-1}{32} + 3 = \frac{-1+96}{32} = \frac{95}{32}$$

آسان

۱۷ - با داشتن جمله یازدهم و نوزدهم، جمله اول و اختلاف مشترک را به‌دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} = 52 &\Rightarrow a_1 + (n-1)d = 52 \Rightarrow a_1 + (11-1)d = 52 \Rightarrow a_1 + 10d = 52 \\ a_{19} = 92 &\Rightarrow a_1 + (n-1)d = 92 \Rightarrow a_1 + (19-1)d = 92 \Rightarrow a_1 + 18d = 92 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow a_{19} - a_{11} = a_1 + 18d - (a_1 + 10d) = 92 - 52 \Rightarrow 8d = 40 \Rightarrow d = 5$$

$$a_{11} = 52 \Rightarrow a_1 + 10d = 52 \xrightarrow{d=5} a_1 + 10(5) = 52 \Rightarrow a_1 + 50 = 52 \Rightarrow a_1 = 2$$

برای جمله عمومی از طریق عبارت  $d(n-1) + a_1 = a_n$  داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow{d=5} a_n = 2 + (n-1)5 = 2 + 5n - 5 = 5n - 3$$

$$\Rightarrow a_n = 5n - 3$$

جمله ۳۰ام برابر است با:

$$a_{30} = 5(30) - 3 = 150 - 3 = 147$$

متوسط

۱۸ - برای به‌دست آوردن سه عدد میان اعداد ۱۰ تا ۱۸ ابتدا لازم است به کمک رابطه به‌دست آمده در سؤال قبل اختلاف مشترک جملات را به‌دست آوریم.

$$d = \frac{b-a}{n-1} \xrightarrow{b=18, a=10, n=3} d = \frac{18-10}{3-1} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\overset{2}{\curvearrowright} \quad \overset{2}{\curvearrowright} \quad \overset{2}{\curvearrowright}$$

$$10, 12, 14, 16, 18$$

پس سه عدد مورد نظر برابر است با: ۱۲ و ۱۴ و ۱۶

متوسط

۱۹ -

$$\underbrace{a_1}_{10}, \underbrace{a_2}_{\square}, \underbrace{a_3}_{\square}, \underbrace{a_4}_{\square}, \underbrace{a_5}_{18}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow{a_1=10} a_5 = 10 + (5-1)d$$

$$\rightarrow 18 = 10 + 4d \rightarrow d = 2$$

۱ در نتیجه سه عدد مورد نظر برابر ۱۲، ۱۴، ۱۶ هستند.

متوسط

۲۰ -

الف)

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\} \rightarrow n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

احتمال مطلوب:

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

(ب)

$$A = \{(3, 3), (3, 6), (6, 3), (6, 6)\} \rightarrow n(A) = 4$$

$$\text{احتمال مطلوب: } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

متوسط

