

افشار

نام آزمون: ریاضی یازدهم تکمیلی تشریحی

زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه

مرکز مشاوره تحصیلی دکتر
علیرضا افشار۱) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ را بدست آورید.۲) معادله‌ی سهمی را بنویسید که محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۲ و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع کند و از نقطه‌ی (۳، ۱) نیز بگذرد. معادله‌ی سهمی را بصورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ در نظر می‌گیریم.۳) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، مقدار عددی عبارت $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ را بدست آورید.۴) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشد، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha+1}$ و $\frac{1}{\beta+1}$ باشد.

۵) معادله‌ی زیر را حل کنید.

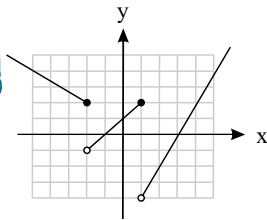
$$2 + \sqrt{1+x} = \sqrt{x+9}$$

۶) معادله‌ی رادیکالی زیر را حل کنید.

$$\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = 1 - x$$

۷) مربعی رسم کنید که پاره‌خط AB یکی از قطرهای آن باشد.

۸) ضابطه و دامنه و برد تابع مربوط به نمودار روبرو را بنویسید.



۹) ضابطه‌ی وارون تابع زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^{\geq -2} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq -1} \\ f(x) = x^2 + 4x + 3 \end{cases}$$

۱۰) در تابع $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ اگر $f^{-1}(4) = a$ باشد، مقدار a را بدست آورید.۱۱) اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$ و $g(x) = \sqrt{x-2}$ دو تابع باشند، آن‌گاه مطلوبست محاسبه:الف - دامنه و ضابطه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ ب - دامنه و ضابطه‌ی تابع $\frac{g}{f}$
پ - $(4f - 3g)(6)$ ۱۲) مجموع اندازه‌ی سه زاویه $\frac{5\pi}{4}$ رادیان و زاویه‌ها با عددهای ۲ و ۳ و ۴ متناسب هستند. زاویه‌ها را برحسب درجه و رادیان بدست آورید.

۱۳) حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

ب) $\sin(-45^\circ) \times \tan(-60^\circ) - \cos(-60^\circ) \times \cot(-30^\circ)$

پ) $\frac{\tan(-45^\circ) + 2\sin(-27^\circ)}{\cos(-36^\circ) - \cot(-45^\circ)}$

ت) $\frac{\sin \frac{5\pi}{6} + 2\cos 120^\circ}{\tan \frac{3\pi}{4} + \sqrt{2}\cos 135^\circ}$

ث) $\cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14}$

ج) $\frac{\sin(\frac{7\pi}{6}) \times \cot 225^\circ - 3\cos 240^\circ \times \tan(\frac{5\pi}{4})}{\tan^2(\frac{7\pi}{6}) + \cos^2(\frac{5\pi}{4})}$

۱۴) نمودار تابع‌های $y = 2^x$, $y = 2^{x+3}$, $y = 2^{(x-2)} - 2$, $y = 3 - 2^x$ و $y = 2^{-x} - 4$ را رسم کنید و دامنه و برد هریک را مشخص کنید.

۱۵) اگر در تابع $f(x) = \begin{cases} x-a & x \geq 1 \\ x^2+2a & x < 1 \end{cases}$ مقدار حد راست در $x=1$ ، نصف حد چپ در این نقطه باشد، a را بدست آورید.

۱۶) حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$

ت) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{4 \sin^2 x - 1}{1 - 2 \sin x}$

۱۷) حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - x - 6}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 3}$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

ت) $\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 9}$

ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{8x^2 - 2x - 1}$

۱۸) مقدار a را طوری بدست آورید که تابع زیر در نقطه $x=3$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|}, & x < 3 \\ x^2 - ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

۱۹) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}, & x > 0 \\ a \sin(x + \frac{\pi}{6}), & x \leq 0 \end{cases}$ به ازای چه مقداری از a در $x=0$ پیوسته است؟

۲۰) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشد و داشته باشیم $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ ، آنگاه $P(B)$ را بدست آورید.

۲۱) احتمال این که فرزندی در خانواده A با چشمانی به رنگ آبی متولد شود ۴۰ درصد و احتمال این که فرزندی در خانواده B با چشمان آبی متولد شود ۷۰ درصد است. مطلوبست احتمال آنکه:

الف- هر دو نوزاد با چشمان به رنگ آبی متولد شوند.

ب- هر دو نوزاد با چشمانی به رنگ غیر از آبی متولد شوند.

پ- فقط یکی از نوزادان با چشمانی به رنگ آبی متولد شوند.

۲۲) در داده‌های مرتب شده ۴, ۶, ۷, ۸, ۱۰, x , ۲۰, ۲۲, ۲۷, ۲۹

الف- اگر میانه برابر با ۱۳ باشد، x را بدست آورید.

ب- اگر میانگین برابر ۱۵ باشد، x و میانه را بدست آورید.

۲۳) در داده آماری، میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ می‌باشد، اگر داده‌های ناجور ۵۰, ۴۵, ۱۵, ۱۰، از بین آن‌ها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده را بدست آورید.

۲۴) نمودار تابع با ضابطه $g(x) = -3 + \sqrt{x-4}$ را رسم کنید.

۲۵) نشان دهید دو خط با معادلات $5x - 12y + 8 = 0$ و $10x + 24y + 10 = 0$ با یکدیگر موازی‌اند.

ب- فاصله این دو خط را محاسبه کنید.

۲۶) معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$

ب) $4x^6 + 1 = 5x^3$

۲۷ ترکیبی از ۴ ماده شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن ماده A ، $\frac{1}{5}$ و احتمال واکنش نشان دادن ماده B ، $\frac{1}{7}$ است. اگر ماده A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن ماده B ، $\frac{1}{4}$ خواهد شد. با چه احتمالی، حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

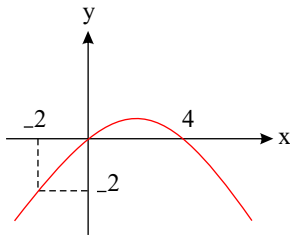
۲۸ احتمال اینکه رویا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند، برابر ۰٫۶۲۵ باشد، رویا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

۲۹ در تساوی‌های زیر به جای x یک زاویه مناسب قرار دهید:

الف) $\sin x = \cos(20^\circ + x)$

ب) $\tan(x + \frac{\pi}{18}) = \cot(\frac{2\pi}{9} + x)$

۳۰ در شکل زیر نمودار سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ رسم شده است. ضرایب a و b و c را بدست آورید.



پاسخنامه تشریحی

۱

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{-12}{4} \rightarrow \boxed{\alpha + \beta = 3}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{\alpha\beta = \frac{1}{4}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = k \xrightarrow{k > 0} k^2 = \frac{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta}$$

$$\rightarrow k^2 = \frac{3 + 2\sqrt{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} = \frac{3 + 2(\frac{1}{2})}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{\frac{1}{4}} \rightarrow k^2 = 16 \rightarrow \boxed{k = 4}$$

$k = -4$ غ

سخت

۲

$$\begin{cases} (2, 0) \\ (0, 2) \\ (3, 1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(2) = 0 \\ f(0) = 2 \\ f(3) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ c = 2 \\ 9a + 3b + c = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ 9a + 3b = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -12a - 6b = 6 \\ 18a + 6b = -2 \end{cases} +$$

$$y = f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2 \leftarrow b = \frac{-4}{3} \leftarrow a = \frac{2}{3} \leftarrow 4a = 4$$

سخت

۳

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \rightarrow S = \alpha + \beta = 5 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \rightarrow P = \alpha\beta = 2 \end{cases}$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{S^2 - 2PS}{P} = \frac{5^2 - 2(2)(5)}{2} = \frac{125 - 20}{2} = \frac{105}{2} \rightarrow \boxed{\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = 47.5}$$

سخت

۴

$$S = \alpha + \beta = -\frac{-2}{1} \rightarrow \boxed{S = 2}$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow \alpha, \beta \rightarrow$$

$$P = \alpha\beta = \frac{-1}{1} \rightarrow \boxed{P = -1}$$

$$S' = \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{\beta+1+\alpha+1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} \rightarrow S' = \frac{S+2}{P+S+1} = \frac{2+2}{-1+2+1} \rightarrow \boxed{S' = 2}$$

$$P' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{\beta+1} = \frac{1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} \rightarrow P' = \frac{1}{P+S+1} = \frac{1}{-1+2+1} \rightarrow \boxed{P' = \frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow X^2 - S'X + P' = 0 \rightarrow X^2 - 2X + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow \boxed{2X^2 - 4X + 1 = 0}$$

سخت

۵

$$\rightarrow (2 + \sqrt{1+x})^2 = (\sqrt{x+9})^2 \rightarrow 4 + 4\sqrt{1+x} + 1 + x = x + 9$$

$$\rightarrow 4\sqrt{1+x} = 4 \rightarrow \sqrt{1+x} = 1 \rightarrow 1+x = 1 \rightarrow \boxed{x = 0}$$

سخت

۶

$$\xrightarrow{x \geq 0} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = (1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x}) \rightarrow (1 - \sqrt{x}) = (1 + \sqrt{x})^2(1 - \sqrt{x})$$

$$\rightarrow (1 + \sqrt{x})^2(1 - \sqrt{x}) - (1 - \sqrt{x}) = 0$$

$$1 - \sqrt{x} = 0 \rightarrow 1 = \sqrt{x} \rightarrow \boxed{x = 1} \quad \text{زیرا: } \frac{1 - \sqrt{1}}{1 + \sqrt{1}} = 1 - 1 \checkmark$$

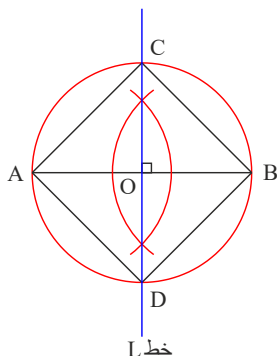
$$\rightarrow (1 - \sqrt{x})((1 + \sqrt{x})^2 - 1) = 0$$

$$(1 + \sqrt{x})^2 = 1 \rightarrow \sqrt{x} = 0 \rightarrow \boxed{x = 0} \quad \text{زیرا: } \frac{1 - \sqrt{0}}{1 + \sqrt{0}} = 1 - 0 \checkmark$$

سخت

۷

در مربع قطرهای عمود منصف یکدیگرند. ابتدا عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. محل برخورد پاره خط AB و عمود منصف AB (خط L) را نقطه‌ای O می‌نامیم. نقطه‌ای O وسط پاره خط AB است. اکنون به مرکز O و شعاع OA ، دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط L (عمود منصف AB) را در دو نقطه‌ای C و D قطع کند. چهار ضلعی $ABCD$ مربع و جواب مسئله است.



سخت

۸

نمودار تابع روبرو بصورت سه ضابطه‌ای می‌باشد و پیش از آوردن ضابطه‌ها هم می‌توان دامنه و برد تابع را از روی شکل بدست آورد.

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow \boxed{D_f = \mathbb{R}}, \quad y > -4 \rightarrow \boxed{R_f = (-4, +\infty)}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad f_1(x) = ax + b \rightarrow \begin{cases} -2a + b = 2 \\ -5a + b = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2a + b = 2 \\ 5a - b = -4 \end{cases} +$$

$$3a = -2 \rightarrow \boxed{a = -\frac{2}{3}}$$

$$-2\left(-\frac{2}{3}\right) + b = 2 \rightarrow \boxed{b = \frac{2}{3}}$$

$$\rightarrow \boxed{f_1(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad f_2(x) = ax + b \rightarrow \begin{cases} -2a + b = -1 \\ a + b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a - b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases} +$$

$$3a = 3 \rightarrow \boxed{a = 1}, \quad \boxed{b = 1}$$

$$\rightarrow \boxed{f_2(x) = x + 1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f_3(x) = ax + b \rightarrow \begin{cases} a + b = -4 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a - b = 4 \\ 3a + b = 0 \end{cases} +$$

$$2a = 4 \rightarrow \boxed{a = 2}, \quad \boxed{b = -6}$$

$$\rightarrow \boxed{f_3(x) = 2x - 6}$$

$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}, & x \leq -2 \\ x + 1, & -2 < x \leq 1 \\ 2x - 6, & 1 < x \end{cases}$$

تابع درجه دوم یک به یک و وارون پذیر نیست، اما در تابع روبرو چون دامنه‌ی تابع محدود شده و شکل تابع نیمه از سهمی تابع درجه ۲ است پس تابع یک به یک بوده و وارون پذیر است.

$$y = x^2 + 4x + 3 \rightarrow y = x^2 + 4x + 4 - 1 \rightarrow y = (x + 2)^2 - 1$$

$$\rightarrow y + 1 = (x + 2)^2 \rightarrow \sqrt{y + 1} = x + 2 \rightarrow x = \sqrt{y + 1} - 2$$

$$\rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y + 1} - 2 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1} - 2 \rightarrow \begin{cases} f^{-1} : \mathbb{R}^{\geq -1} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq -2} \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1} - 2 \end{cases}$$

سخت

۹

سخت

$$f^{-1}(۴) = a \rightarrow (۴, a) \in f^{-1} \rightarrow (a, ۴) \in f \rightarrow -a + \sqrt{-۲a} = ۴$$

$$\rightarrow \sqrt{-۲a} = ۴ + a \xrightarrow{\text{توان ۲}} -۲a = a^۲ + ۸a + ۱۶ \rightarrow a^۲ + ۱۰a + ۱۶ = ۰$$

$$\rightarrow (a + ۸)(a + ۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} a + ۲ = ۰ \rightarrow \boxed{a = -۲} \xrightarrow{\text{چک کردن}} \sqrt{-۲(-۲)} = ۴ - ۲ \quad \checkmark \\ a + ۸ = ۰ \rightarrow a = -۸ \xrightarrow{\text{چک کردن}} \sqrt{-۲(-۸)} = ۴ - ۸ \quad \times \end{cases}$$

$$\rightarrow (a + ۸)(a + ۲) = ۰ \rightarrow \begin{cases} a + ۲ = ۰ \rightarrow \boxed{a = -۲} \xrightarrow{\text{چک کردن}} \sqrt{-۲(-۲)} = ۴ - ۲ \quad \checkmark \\ a + ۸ = ۰ \rightarrow a = -۸ \xrightarrow{\text{چک کردن}} \sqrt{-۲(-۸)} = ۴ - ۸ \quad \times \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-۴} \rightarrow x-۴ \neq ۰ \rightarrow x \neq ۴ \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{۴\}$$

$$g(x) = \sqrt{x-۲} \rightarrow x-۲ \geq ۰ \rightarrow x \geq ۲ \rightarrow D_g = [۲, +\infty)$$

$$\rightarrow D_f \cap D_g = [۲, +\infty) - \{۴\} \text{ یا } D_f \cap D_g = [۲, ۴) \cup (۴, +\infty)$$

$$\text{الف) } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x+1}{x-۴}}{\sqrt{x-۲}} \rightarrow \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{(x+1)}{(x-۴)\sqrt{x-۲}}}$$

$$\left. \begin{aligned} D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\} \\ g(x) &= ۰ \rightarrow \sqrt{x-۲} = ۰ \rightarrow x = ۲ \end{aligned} \right\} \rightarrow D_{\frac{f}{g}} = ([۲, ۴) \cup (۴, +\infty)) - \{۲\}$$

$$\rightarrow \boxed{D_{\frac{f}{g}} = (۲, ۴) \cup (۴, +\infty)}$$

$$\text{ب) } \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x-۲}}{\frac{x+1}{x-۴}} \rightarrow \boxed{\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{(\sqrt{x-۲})(x-۴)}{(x+1)}}$$

$$f(x) = ۰ \rightarrow \frac{x+1}{x-۴} = ۰ \rightarrow x = -۱ \rightarrow D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x | f(x) = ۰\}$$

$$\rightarrow D_{\frac{g}{f}} = ([۲, ۴) \cup (۴, +\infty)) - \{۱\} \rightarrow \boxed{D_{\frac{g}{f}} = [۲, ۴) \cup (۴, +\infty)}$$

$$\text{پ) } f(۶) = \frac{۶+۱}{۶-۴} = \frac{۷}{۲}, \quad g(۶) = \sqrt{۶-۲} = ۲$$

$$\rightarrow (۴f - ۳g)(۶) = ۴f(۶) - ۳g(۶) = ۴\left(\frac{۷}{۲}\right) - ۳(۲) = ۱۴ - ۶$$

$$\rightarrow \boxed{(۴f - ۳g)(۶) = ۸}$$

$$\begin{cases} \alpha = ۲x, \beta = ۳x, \gamma = ۴x \\ \alpha + \beta + \gamma = \frac{۵\pi}{۴} \rightarrow ۲x + ۳x + ۴x = \frac{۵\pi}{۴} \rightarrow ۹x = \frac{۵\pi}{۴} \rightarrow x = \frac{۵\pi}{۳۶} \end{cases}$$

$$\rightarrow \alpha = ۲x = ۲ \times \frac{۵\pi}{۳۶} \rightarrow \alpha = \frac{۵\pi}{۱۸} \text{ رادیان, } \alpha = ۵۰^\circ$$

$$\rightarrow \beta = ۳x = ۳ \times \frac{۵\pi}{۳۶} \rightarrow \beta = \frac{۵\pi}{۱۲} \text{ رادیان, } \beta = ۷۵^\circ$$

$$\rightarrow \gamma = ۴x = ۴ \times \frac{۵\pi}{۳۶} \rightarrow \gamma = \frac{۵\pi}{۹} \text{ رادیان, } \gamma = ۱۰۰^\circ$$

$$\text{الف) } = -\tan\left(\frac{\pi}{۳}\right) - \left(-\sin\left(\frac{\pi}{۴}\right)\right) \cos \frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲} = -\sqrt{۳} + \frac{\sqrt{۲}}{۴} = \frac{-۴\sqrt{۳} + \sqrt{۲}}{۴}$$

$$ب) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-\sqrt{3}) - \left(\frac{1}{2}\right)(-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{2}$$

$$پ) = \frac{-\tan 45^\circ - 2 \sin 27^\circ}{\cos 36^\circ + \cot 45^\circ} = \frac{-1 - 2(-1)}{1 + 1} = \frac{1}{2} = \frac{-\tan 45^\circ - 2 \sin 27^\circ}{\cos 36^\circ + \cot 45^\circ} = \frac{-1 - 2(-1)}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$ت) = \frac{\sin(\pi - \frac{\pi}{6}) + 2 \cos(180^\circ - 60^\circ)}{\tan(\pi - \frac{\pi}{6}) + \sqrt{2} \cos(180^\circ - 45^\circ)}$$

$$= \frac{\sin \frac{\pi}{6} - 2 \cos 60^\circ}{-\tan \frac{\pi}{6} - \sqrt{2} \cos 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2} - 2(\frac{1}{2})}{-1 - \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{-1 - 1} = \frac{-\frac{1}{2}}{-2} = \frac{1}{4}$$

$$ث) = \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos(\pi - \frac{5\pi}{14}) + \cos(\pi - \frac{3\pi}{14}) =$$

$$= \cancel{\cos \frac{3\pi}{14}} + \cancel{\cos \frac{5\pi}{14}} + \cos \frac{7\pi}{14} - \cancel{\cos \frac{5\pi}{14}} - \cancel{\cos \frac{3\pi}{14}} = \cos \frac{7\pi}{14} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

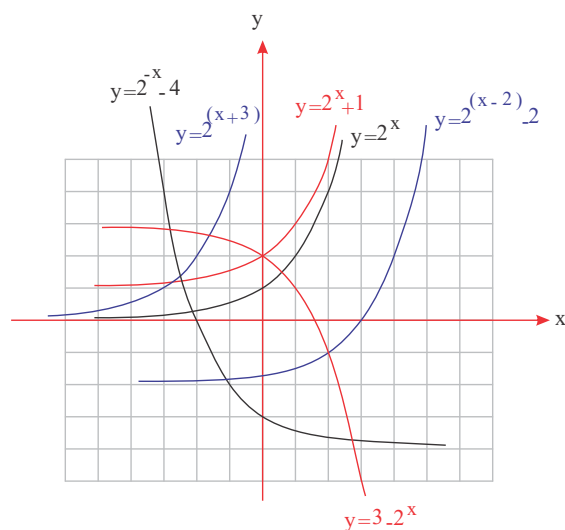
$$ج) = \frac{\sin(\pi + \frac{\pi}{6}) \times \cot(180^\circ + 45^\circ) - 2 \cos(180^\circ + 60^\circ) \tan(\pi + \frac{\pi}{6})}{(\tan(\pi + \frac{\pi}{6}))^2 + (\cos(\pi + \frac{\pi}{6}))^2}$$

$$= \frac{-\sin \frac{\pi}{6} \times \cot 45^\circ - 2(-\cos 60^\circ) \times \tan \frac{\pi}{6}}{\tan^2(\frac{\pi}{6}) + (-\cos \frac{\pi}{6})^2} = \frac{-\frac{1}{2} \times 1 - 2(-\frac{1}{2})(1)}{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{2}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}$$

سخت

۱۴



$$الف) y = 2^x \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (0, +\infty)$$

$$ب) y = 2^x + 1 \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (1, +\infty)$$

$$پ) y = 2^{(x+3)} \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (0, +\infty)$$

$$ت) y = 2^{(x-2)} - 2 \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (-2, +\infty)$$

$$ث) y = 3 - 2^x \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (-\infty, 3)$$

$$ج) y = 2^{-x} - 4 \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (-4, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - a) = 1 - a$$

سخت

۱۵

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^r + ra) = (1)^r + ra = 1 + ra$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{r} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \rightarrow 1 - a = \frac{1}{r} (1 + ra) \rightarrow r - ra = 1 + ra \rightarrow 1 = ra \rightarrow a = \frac{1}{r}$$

سخت

۱۶

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{\cos^r x - \sin^r x}{\sqrt{r} \sin x - \sqrt{r} \cos x} = \frac{\left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)^r - \left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)^r}{\sqrt{r}\left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right) - \sqrt{r}\left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)} = \frac{0}{0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{-\sqrt{r}(\cos x - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{\cos x + \sin x}{-\sqrt{r}} = \frac{\frac{\sqrt{r}}{r} + \frac{\sqrt{r}}{r}}{-\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{r}}{-\sqrt{r}} = -1$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^r x} = \frac{1 - 1}{(0)^r} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^r x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{\sin^r x}{\cos^r x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos) \cos^r x}{\sin^r x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cos^r x}{1 - \cos^r x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cos^r x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^r x}{1 + \cos x} = \frac{(1)^r}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{\cos^r x}{1 - \sin x} = \frac{(0)^r}{1 - 1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{\cos^r x}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{1 - \sin^r x}{1 - \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} (1 + \sin x) = 1 + 1 = 2$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{r \sin^r x - 1}{1 - r \sin x} = \frac{r\left(\frac{1}{r}\right)^r - 1}{1 - r\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{r \sin^r x - 1}{1 - r \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{(r \sin x - 1)(r \sin x + 1)}{-(r \sin x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{r \sin x + 1}{-1} = \frac{r\left(\frac{1}{r}\right) + 1}{-1} = \frac{r}{-1} = -r$$

سخت

۱۷

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow (-r)} \frac{rx^r - 1}{x^r - x - r} = \frac{r(-r)^r - 1}{(-r)^r - (-r) - r} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-r)} \frac{r(x^r - r)}{(x + r)(x - r)} = \lim_{x \rightarrow (-r)} \frac{r(x - r)(x + r)}{(x + r)(x - r)} = \lim_{x \rightarrow (-r)} \frac{r(x - r)}{(x - r)} = \frac{r(-r - r)}{-r - r} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^r - x}{x^r - rx + r} = \frac{(1)^r - 1}{(1)^r - r(1) + r} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(x - r)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x - r} = \frac{1}{1 - r} = \frac{1}{-r} = -\frac{1}{r}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow (-r)} \frac{x^r + x - r}{x^r + rx + r} = \frac{(-r)^r + (-r) - r}{(-r)^r + r(-r) + r} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-r)} \frac{(x + r)(x - 1)}{(x + r)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow (-r)} \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{-r - 1}{-r + 1} = \frac{-r}{-1} = r$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow (-r)} \frac{x^r + rx^r}{x^r - 1} = \frac{(-r)^r + r(-r)^r}{(-r)^r - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2}{x-3} = \frac{(-3)^2}{-3-3} = \frac{9}{-6} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{8x^2 - 2x - 1} = \frac{4(\frac{1}{2})^2 - 1}{8(\frac{1}{2})^2 - 2(\frac{1}{2}) - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x+1}{4x+1} = \frac{2(\frac{1}{2})+1}{4(\frac{1}{2})+1} = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|}, & x < 3 \\ x^2 - ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - ax = (3)^2 - a(3) = 9 - 3a$$

$$f(3) = 3^2 - a(3) = 9 - 3a$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{-(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x - 3)(x + 3)}{-(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x + 3}{-1} = -6$$

$$\rightarrow 9 - 3a = -6 \rightarrow 15 = 3a \rightarrow \boxed{a = 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a \sin(x + \frac{\pi}{6}) = a \sin(0 + \frac{\pi}{6}) = \frac{a}{2}, f(0) = \frac{a}{2}$$

$$\rightarrow \frac{a}{2} = 2 \rightarrow \boxed{a = 4}$$

$$\text{پیشامدهای } A \text{ و } B \text{ مستقل از هم هستند} \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{3}P(B) \rightarrow \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = (1 - \frac{1}{3})P(B)$$

$$\rightarrow \frac{3}{6} = \frac{2}{3}P(B) \rightarrow \boxed{P(B) = \frac{3}{4}}$$

$$\rightarrow P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{4} \rightarrow \boxed{P(B') = \frac{1}{4}}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{40}{100} \times \frac{70}{100} \rightarrow \boxed{P(A \cap B) = \frac{28}{100}}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{40}{100} \rightarrow \boxed{P(A') = \frac{60}{100}}$$

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{70}{100} \rightarrow \boxed{P(B') = \frac{30}{100}}$$

$$P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B') = \frac{60}{100} \times \frac{30}{100} \rightarrow \boxed{P(A' \cap B') = \frac{18}{100}}$$

سخت

۱۸

سخت

۱۹

سخت

۲۰

سخت

الف- ۲۱

$$P(A \cap B') + P(A' \cap B) = P(A) \cdot P(B') + P(A') \cdot P(B) = \frac{40}{100} \times \frac{30}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{70}{100}$$

$$\rightarrow P(A \cap B') + P(A' \cap B) = \frac{54}{100}$$

سخت

۲۲

الف -

$$Q_r = \frac{10+x}{2} \rightarrow 13 = \frac{10+x}{2} \rightarrow 10+x = 26 \rightarrow x = 16$$

ب -

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_r + \dots + x_N}{N} \rightarrow 15 = \frac{4 + 6 + \dots + x + \dots + 29}{10} \rightarrow 15 = \frac{133 + x}{10}$$

$$\rightarrow 133 + x = 150 \rightarrow x = 17 \rightarrow Q_r = \frac{10+17}{2} \rightarrow Q_r = 13,5$$

سخت

۲۳

$$\bar{X}_{r5} = \frac{x_1 + x_r + \dots + x_{r5}}{25} \rightarrow 30 = \frac{x_1 + x_r + \dots + x_{r1} + 10 + 15 + 45 + 50}{25}$$

$$\rightarrow x_1 + x_r + \dots + x_{r1} + 120 = 750 \rightarrow x_1 + x_r + \dots + x_{r1} = 630$$

همان میانگین قبلی است

$$\rightarrow \bar{X}_{r1} = \frac{x_1 + x_r + \dots + x_{r1}}{21} = \frac{630}{21} \rightarrow \bar{X}_{r1} = 30$$

$$\sigma_{r5} = 8 \rightarrow \sigma_{r5}^2 = 64$$

$$\sigma_{r5}^2 = \frac{(x_1 - \bar{X}_{r5})^2 + \dots + (x_{r5} - \bar{X}_{r5})^2}{25} \rightarrow 64 = \frac{(x_1 - 30)^2 + \dots + (x_{r5} - 30)^2}{25}$$

$$\rightarrow 64 \times 25 = (x_1 - 30)^2 + \dots + (x_{r1} - 30)^2 + (10 - 30)^2 + (15 - 30)^2$$

$$+ (45 - 30)^2 + (50 - 30)^2$$

$$\rightarrow 1600 = (x_1 - 30)^2 + \dots + (x_{r1} - 30)^2 + 400 + 225 + 225 + 400$$

$$\rightarrow (x_1 - 30)^2 + \dots + (x_{r1} - 30)^2 = 350$$

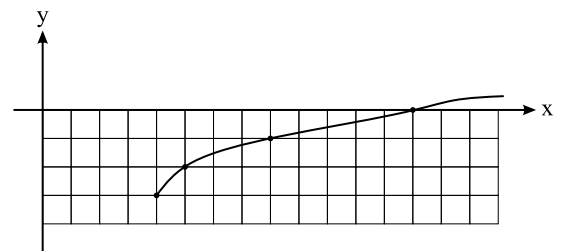
$$\rightarrow \sigma_{r1}^2 = \frac{(x_1 - 30)^2 + \dots + (x_{r1} - 30)^2}{21} = \frac{350}{21} \rightarrow \sigma_{r1}^2 = \frac{50}{3} \approx 16,67$$

سخت

۲۴

$$g(x) = -3 + \sqrt{x-4} \rightarrow x-4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4 \rightarrow D_g = [4, +\infty)$$

x	y
4	-3
5	-2
8	-1
13	0



ریاضی یازدهم تکمیلی تئوریتی

سخت

۲۵

$$\text{الف) } \begin{cases} 5x - 12y + 8 = 0 \rightarrow 5x + 8 = 12y \rightarrow y = \frac{5}{12}x + \frac{8}{12} \rightarrow m_1 = \frac{5}{12} \\ -10x + 24y + 10 = 0 \rightarrow 24y = 10x - 10 \rightarrow y = \frac{5}{12}x - \frac{5}{12} \rightarrow m_2 = \frac{5}{12} \end{cases}$$

دو خط با هم موازی نیستند

$$\text{ب) } L_1 : 5x - 12y + 8 = 0 \quad L_2 : 5x - 12y - 5 = 0$$

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|8 - (-5)|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{13}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{13}{\sqrt{169}} = \frac{13}{13} \rightarrow d = 1$$

سخت

۲۶

$$\text{الف) } x^2 - 8x^2 + 8 = 0$$

$$x^2 = u \rightarrow x^2 = u^2$$

$$u^2 - 8u + 8 = 0 \rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4(1)(8) = 64 - 32 = 32$$

$$\rightarrow u = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{2} \rightarrow u = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} u = 4 + 2\sqrt{2} \rightarrow x^2 = 4 + 2\sqrt{2} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \\ x = -\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \end{cases} \\ u = 4 - 2\sqrt{2} \rightarrow x^2 = 4 - 2\sqrt{2} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \\ x = -\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \end{cases} \end{cases}$$

ب) $4x^2 + 1 = 5x^2 \rightarrow 4x^2 - 5x^2 + 1 = 0$, $x^2 = u \rightarrow x^2 = u^2$

$$4u^2 - 5u + 1 = 0 \rightarrow (4u - 1)(u - 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4u - 1 = 0 \rightarrow u = \frac{1}{4} \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{4}} \\ u - 1 = 0 \rightarrow u = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

سخت

۲۷

$$P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{4}, P(A \cup B) = ?$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{28}{140} + \frac{35}{140} - \frac{7}{140} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{56}{140}$$

سخت

۲۸

$A =$ پیشامد قبول شدن رویا در درس ریاضی $B =$ پیشامد قبول شدن دوست رویا در درس ریاضی

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند در نتیجه:

$$P(B) = x, P(A) = 2x$$

$$P(A \cup B) = 0.625 \rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{625}{1000}$$

$$\rightarrow 2x + x - (2x \cdot x) = \frac{5}{8} \rightarrow 3x - 2x^2 = \frac{5}{8} \rightarrow 24x - 16x^2 = 5$$

$$\rightarrow 16x^2 - 24x + 5 = 0 \rightarrow (4x)^2 - 6(4x) + 5 = 0 \rightarrow (4x - 1)(4x - 5) = 0$$

$$\begin{cases} 4x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{4} > 1 \text{ غیر قابل قبول} \\ 4x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}, 2x = \frac{1}{2} \rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

الف) $\rightarrow x + 20^\circ + x = 90^\circ + (k \times 360^\circ)$

$$k = 0 \rightarrow 2x = 70^\circ \rightarrow x = 35^\circ$$

$$k = 1 \rightarrow 2x + 20 = 450^\circ \rightarrow 2x = 430^\circ \rightarrow x = 215^\circ$$

$$k = 2 \rightarrow 2x + 20 = 810^\circ \rightarrow 2x = 790^\circ \rightarrow x = 395^\circ \rightarrow x = 35^\circ \text{ تکراری}$$

سخت

۲۹

$$b) x + \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{9} + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$k = 0 \rightarrow 2x + \frac{5\pi}{18} = \frac{\pi}{2} \rightarrow 2x = \frac{4\pi}{18} \rightarrow 2x = \frac{2\pi}{9} \rightarrow x = \frac{\pi}{9}$$

$$k = 1 \rightarrow 2x + \frac{5\pi}{18} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \rightarrow 2x = \frac{40\pi}{18} \rightarrow 2x = \frac{20\pi}{9} \rightarrow x = \frac{10\pi}{9}$$

$$k = 2 \rightarrow 2x + \frac{5\pi}{18} = \frac{\pi}{2} + 4\pi \rightarrow 2x = \frac{76\pi}{18} \rightarrow 2x = \frac{38\pi}{9}$$

$$\rightarrow x = \frac{19\pi}{9} \rightarrow x = 2\pi + \frac{\pi}{9} \rightarrow x = \frac{\pi}{9} \text{ تکراری}$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(-2) = -2 \\ f(4) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 4a - 2b + c = -2 \\ 16a + 4b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = -2 \\ 16a + 4b = 0 \end{cases} +$$

$$12a = -2 \rightarrow a = -\frac{1}{6}, b = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x$$

سخت

۳۰

سخت