نام و نام خانوادگی:

تعداد سوال: ۳۰

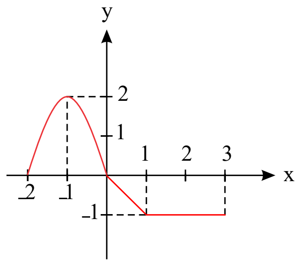
نام آزمون: ریاضی دوازدهم تکمیلی تشریحی

زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه

افشار

مرکز مشاوره تحصیلی دکتر
علیرضا افشار

۱) نمودار تابع $y=f(-2x)$ به‌صورت مقابل است، نمودار تابع $y=-2f(x-2)$ را رسم کنید.



۲) نمودار $y=\sqrt[3]{x}$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل را ۴ واحد به راست منتقل می‌کنیم و سپس آن را ۳ واحد به پایین می‌بریم تا تابع f حاصل شود، ضابطهٔ تابع وارون تابع f را بیابید.

۳) اگر f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، دامنهٔ تابع g را بیابید.

$$g(x)=\sqrt{f(|2x-1|)-f(|x+1|)}$$

۴) اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(-2)=0$ باشد، دامنهٔ تابع زیر را بیابید.

$$g(x)=\sqrt{(x^2-81)f(x)}$$

۵) معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\sin^2(x-\frac{\pi}{8})+2\cos(\frac{5\pi}{8}-x)=3$$

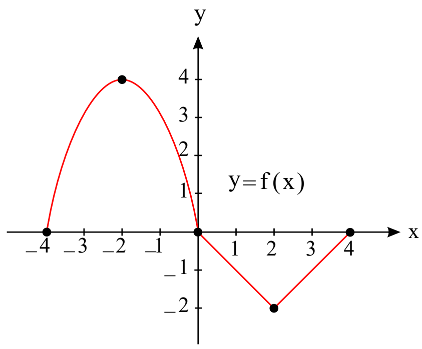
۶) دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\tan^2 x-1}$ را بیابید.

۷) نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع، صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-2x-3 & x<-4\\ 3 & -4\leq x<2\\ 3x-2 & x\geq 2\end{cases}$$

۸) نمودار تابع f با دامنهٔ $[-4,4]$ به صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y=f(2x)$ و $y=f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنیم.

x	$f(x)$
-4	0
-2	4
0	0
2	-2
4	0



۹) ضابطهٔ تابع وارون توابع یک به یک زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{-8x+3}{2}$

ب) $g(x)=-5-\sqrt{3x+1}$

۱۰ در مورد هریک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=\frac{-7}{2}x-3 \quad , \quad g(x)=-\frac{2x+6}{7}$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-8} \quad , \quad g(x)=8+x^2\ ;\ x\leq 0$

۱۱ برای تابع $f=\{(-2,-1),(1,-1),(2,0),(4,-2)\}$، تابع‌های ترکیب $h=fo(f^2+f)$ و $k=(f^2+f)of^{-1}$ را با اعضایشان مشخص کنید.

۱۲ تابع $f=\{(-1,3),(2,-1),(0,2),(6,0)\}$ مفروض است. تابع ترکیب $h=(f^2+f)of$ را با اعضایش مشخص کنید.

۱۳ با فرض $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$ و $g=\{(3,-1),(0,2),(4,1),(1,-2)\}$، دامنه، برد و اعضای تابع ترکیب fog را مشخص کنید.

۱۴ برای توابع $f=\{(4,-1),(3,1),(5,2)\}$ و $g=\{(-1,2),(4,0),(5,3)\}$، تابع‌های ترکیب gof^{-1} و fog^{-1} را به‌دست آورید.

۱۵ برای تابع‌های اکیداً صعودی f و g نشان دهید که تابع‌های ترکیبی fog و gof نیز اکیداً صعودی هستند.

۱۶ تابع $h(x)=9^x-3^{x+1}$ را به‌صورت ترکیب دو تابع دیگر بنویسید.

۱۷ تابع $h(x)=x^2+x$ را به‌صورت ترکیب دو تابع f و g نوشته‌ایم. ضابطهٔ توابع f و g را به‌دست آورید. آیا این ضابطه‌ها منحصربه‌فرد هستند؟

۱۸ برای تابع‌های اکیداً صعودی f و g نشان دهید توابع ترکیب $g^{-1}of^{-1}$ و $f^{-1}og^{-1}$ نیز اکیداً صعودی هستند.

۱۹ تابع $h(x)=x-2$ را از ترکیب کدام دو تابع می‌توان به‌دست آورد؟

الف) $f(x)=x^2\ ,\ g(x)=\sqrt{x-2}$ ب) $f(x)=\sqrt{x}\ ,\ g(x)=(x-2)^2$

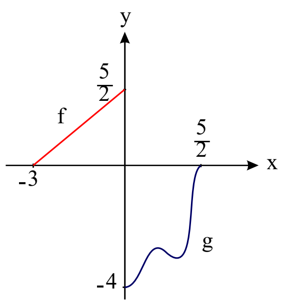
۲۰ هرگاه بدانیم: $f(x)=x^2-3x$، $g(x)=x^2+mx$ و $(f^{-1}og^{-1}of^{-1})(0)=2$، مقدارهای ممکن برای m را به‌دست آورید.

۲۱ با فرض $f(x)=x+1$ و $g(x)=2x^2-3x$، صفرهای تابع $y=(gof^{-1})(x)$ را به‌دست آورید.

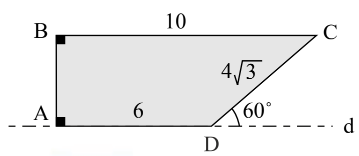
۲۲ برای تابع وارون‌پذیر f، تابع‌های ترکیب fof^{-1} و $f^{-1}of$ چه زمانی باهم برابر می‌شوند؟

۲۳ اگر $f=\{(3,2),(2,0),(0,-3)\}$ و $g(x)=\begin{cases} x^2+1 & ; x>0 \\ x^2-1 & ; x\leq 0 \end{cases}$ بوده و تساوی $f^{-1}og(m)=2$ نیز برقرار باشد، مقدار m را به دست آورید.

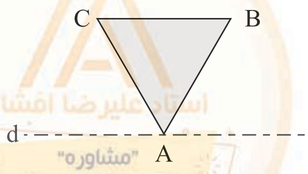
۲۴ نمودارهای توابع f و g در شکل رسم شده‌اند. دامنهٔ ترکیب gof را به‌دست آورید.



۲۵ از دوران ذوزنقهٔ $ABCD$ حول d شکلی با چه حجم به‌دست می‌آید؟



۲۶ مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $2\sqrt{3}$ را حول خط d دوران می‌دهیم. حجم حاصل چقدر است؟

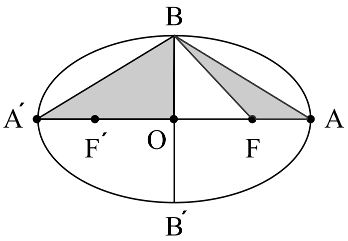


۲۷) طول قطر کوچک، فاصلهٔ کانونی و خروج از مرکز یک بیضی را به‌دست آورید که نقاط $A\left|\begin{matrix}۳\\۴\end{matrix}\right.$ و $A'\left|\begin{matrix}۳\\-۴\end{matrix}\right.$ دو سر قطر بزرگ بیضی و طول قطر کوچک آن $\frac{۳}{۴}$ فاصلهٔ کانونی باشد.

۲۸) یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکهٔ دیگر را باهم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال این‌که دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

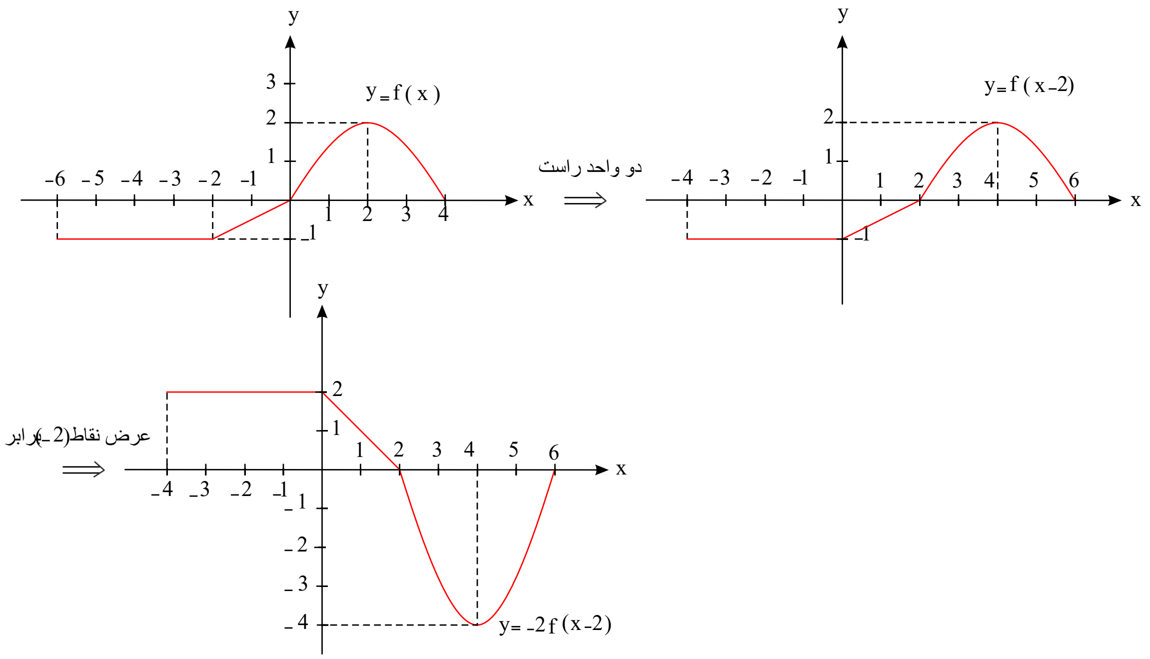
۲۹) در دو جعبه به‌ترتیب ۲۴ و ۱۵ عدد لامپ یکسان موجود است. در جعبهٔ اول ۴ عدد و در جعبهٔ دوم ۳ عدد لامپ معیوب‌اند. از اولی ۸ لامپ و از دومی ۶ لامپ به‌تصادف برداشته و در یک جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبه جدید معیوب است؟

۳۰) در بیضی زیر اگر مساحت مثلث BAF یک‌سوم مساحت مثلث $A'OB$ باشد و طول قطر کوچک بیضی ۴ باشد، خروج از مرکز و طول قطر بزرگ بیضی را بیابید.



پاسخنامه تشریحی

۱ با توجه به این که برای رسم $y=f(-۲x)$ باید در نمودار $y=f(x)$ طول نقاط را بر -۲ تقسیم کنیم، حال برای رسم $y=f(-۲x)$ از روی $y=f(x)$ باید در نمودار $y=f(-۲x)$ طول نقاط را در -۲ ضرب کنیم.



سخت

۲

$$y=\sqrt[۳]{x}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } x \text{ ها}} y=-\sqrt[۳]{x}\xrightarrow[x\to x-۴]{\text{۴ واحد راست}} y=-\sqrt[۳]{x-۴}$$

$$\xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}} y=-\sqrt[۳]{x-۴}-۳\Rightarrow f(x)=-\sqrt[۳]{x-۴}-۳$$

$$y=-\sqrt[۳]{x-۴}-۳\Rightarrow \sqrt[۳]{x-۴}=-y-۳\Rightarrow x-۴=(-y-۳)^۳$$

$$\Rightarrow x=(-y-۳)^۳+۴\Rightarrow x=۴-(۳+y)^۳\Rightarrow y=۴-(۳+x)^۳=f^{-۱}(x)$$

سخت

۳ نکته: اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد و $f(a)\le f(b)$ آنگاه $a\ge b$.

$$g(x)=\sqrt{f(|۲x-۱|)-f(|x+۱|)}\Rightarrow f(|۲x-۱|)-f(|x+۱|)\ge ۰$$

$$\Rightarrow f(|۲x-۱|)\ge f(|x+۱|)\xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} |۲x-۱|\le |x+۱|$$

$$\Rightarrow (۲x-۱)^۲\le (x+۱)^۲\Rightarrow ۴x^۲-۴x+۱\le x^۲+۲x+۱\Rightarrow ۳x^۲-۶x\le ۰$$

$$\Rightarrow ۳x(x-۲)\le ۰\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & ۰ & & ۲ & \\ \hline ۳x(x-۲) & + & ۰ & - & ۰ & + \end{array}\Rightarrow ۰\le x\le ۲$$

$$\Rightarrow D_g=[۰,۲]$$

سخت

۴

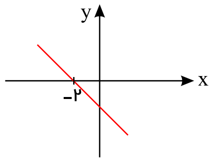
$$g(x)=\sqrt{(x^۲-۸۱)f(x)}\Rightarrow (x^۲-۸۱)f(x)\ge ۰$$

چون f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(-۲)=۰$ است، داریم:

برای $x<-۲$ تابع f مثبت است. $x<-۲\Rightarrow f(x)>f(-۲)\Rightarrow f(x)>۰\Rightarrow$

برای $x>-۲$ تابع f منفی است. $x>-۲\Rightarrow f(x)<f(-۲)\Rightarrow f(x)<۰\Rightarrow$

نمودار f تقریباً به‌صورت مقابل است.



$x^۲ - ۸۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۹$

x		-۹		-۲		۹	
$x^۲ - ۸۱$	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$
$f(x)$	$+$		$+$	۰	$-$		$-$
$(x^۲ - ۸۱)f(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$\Rightarrow x \leq -۹$ یا $-۲ \leq x \leq ۹ \Rightarrow D_g = (-\infty, -۹] \cup [-۲, ۹)$

سخت

۵) میدانیم: $\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cos\alpha$

$$\sin^۲(x - \frac{\pi}{۸}) + ۲\cos(\frac{۵\pi}{۸} - x) = ۳ \Rightarrow \sin^۲(x - \frac{\pi}{۸}) + ۲\sin(\frac{\pi}{۲} - (\frac{۵\pi}{۸} - x)) - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \sin^۲(x - \frac{\pi}{۸}) + ۲\sin(\frac{\pi}{۲} - \frac{۵\pi}{۸} + x) - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \sin^۲(x - \frac{\pi}{۸}) + ۲\sin(x - \frac{\pi}{۸}) - ۳ = ۰ \ , \ \sin(x - \frac{\pi}{۸}) = t$$

$$\Rightarrow t^۲ + ۲t - ۳ = ۰ \Rightarrow t = ۱ \ , \ t = -۳$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{۸}) = -۳ \text{ غ ق ق} \ , \ \sin(x - \frac{\pi}{۸}) = ۱ \Rightarrow x - \frac{\pi}{۸} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۸}$$

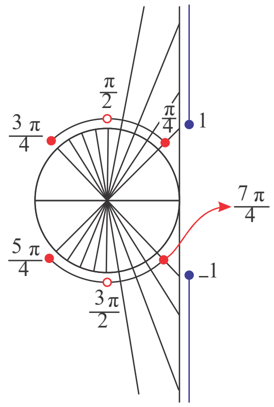
سخت

۶)

$f(x) = \sqrt{\tan^۲ x - ۱} \Rightarrow \tan^۲ x - ۱ \geq ۰ \Rightarrow \tan^۲ x \geq ۱ \Rightarrow |\tan x| \geq ۱$

$\Rightarrow \tan x \leq -۱$ یا $\tan x \geq ۱$

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل حدود x بصورت زیر است.



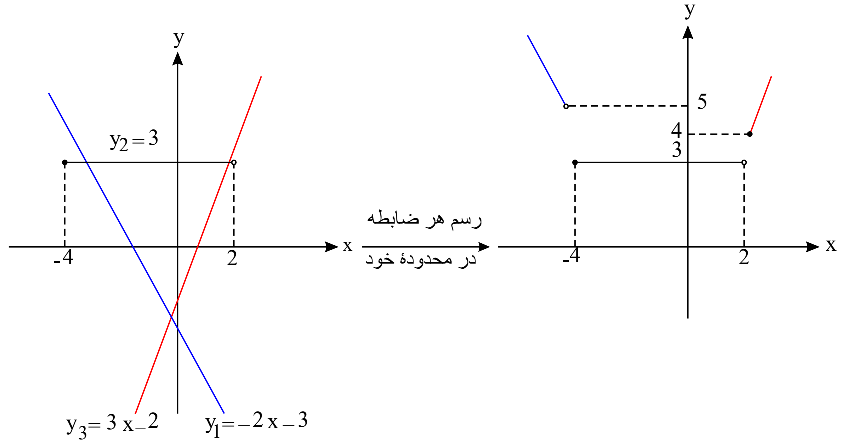
$\frac{\pi}{۴} \leq x \leq \frac{۳\pi}{۴}$ یا $\frac{۵\pi}{۴} \leq x \leq \frac{۷\pi}{۴}$ و $x \neq \frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$

در حالت کلی داریم:

$۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \leq x \leq ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴}$ یا $۲k\pi + \frac{۵\pi}{۴} \leq x \leq ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۴}$ و $x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$

سخت

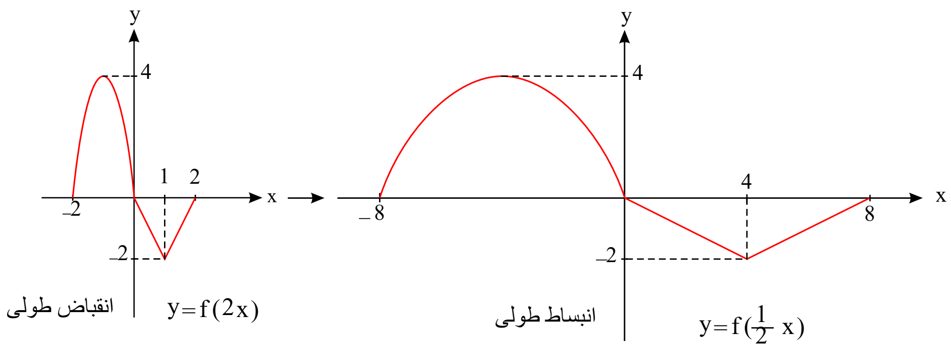
۷) رسم نمودار تابع f به آسانی قابل درک است. چرا که در هر مرحله با یک تابع خطی روبرو هستیم:



می‌بینیم که این نمودار در بازهٔ $(-\infty, -۴)$ اکیداً نزولی، در بازهٔ $[-۴, ۲)$ ثابت (که می‌توان آن را صعودی یا نزولی هم در نظر گرفت) و بالاخره در فاصلهٔ $[۲, +\infty)$ اکیداً صعودی است. براین اساس می‌توانیم ادعا کنیم که این تابع در فاصلهٔ $(-\infty, ۲)$ نزولی و در فاصلهٔ $[-۴, +\infty)$ صعودی است.

سخت

۸ باید بدانیم که برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ از روی نمودار $y = f(x)$ کافی است طول هر نقطه از $f(x)$ را $\frac{۱}{k}$ برابر کرده و عرض آن‌ها را ثابت نگه داریم. به همین مناسبت می‌توانیم بگوییم که نمودار تابع $y = f(x)$، برای kهای بزرگ‌تر از یک $(k > ۱)$ با ضریب $\frac{۱}{k}$ منقبض (بسته‌تر) و برای kهای بین ۰ و ۱ $(۰ < k < ۱)$ با ضریب $\frac{۱}{k}$ منبسط (یا بازتر) می‌شود.



$D=[-2,2]$, $R=[-2,4]$

$D=[-8,8]$, $R=[-2,4]$

سخت

۹

الف) $f(x) = \dfrac{-۸x+۳}{۲}\ :\ y = \dfrac{-۸x+۳}{۲} \xrightarrow{\times ۲} ۲y = -۸x+۳ \xrightarrow{-۳} -۸x = ۲y-۳$

$\xrightarrow{\div(-۸)} x = \dfrac{۲y-۳}{-۸} = \dfrac{-۱}{۴}y + \dfrac{۳}{۸} \xrightarrow{\text{حالا}} f^{-۱}(x) = \dfrac{-۱}{۴}x + \dfrac{۳}{۸}$

ب) $g(x) = -۵ - \sqrt{۳x+۱}\ :\ y = -۵ - \sqrt{۳x+۱} \to y+۵ = -\sqrt{۳x+۱}$

$\xrightarrow[\substack{\left(\substack{y+۵\le ۰ \\ y\le -۵}\right) \\ x\ge \frac{-۱}{۳}}]{\text{به توان ۲ برسان}} (y+۵)^۲ = (۳x+۱) \xrightarrow{-۱} (y+۵)^۲ - ۱ = ۳x \xrightarrow{\div ۳} x = \dfrac{۱}{۳}(y+۵)^۲ - \dfrac{۱}{۳}$

$\xrightarrow{\text{حالا}} g^{-۱}(x) = \dfrac{۱}{۳}(x+۵)^۲ - \dfrac{۱}{۳}$

که با توجه به شرایط $y \le -۵$ و $x \ge \frac{-۱}{۳}$، برای دامنه و برد تابع وارون، داریم:

$D_{g^{-۱}} = R_g = (-\infty, -۵]\ ,\ R_{g^{-۱}} = D_g = [-\frac{۱}{۳}, +\infty)$

سخت

۱۰ در هر مورد وارون یکی از توابع را یافته (معمولاً آن تابعی که محاسبهٔ x برحسب y در آن ساده‌تر است) و نشان می‌دهیم که تابع وارون به‌دست آمده همان تابع دوم است.

الف)
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{-۷}{۲}x-۳ \\ g(x)=-\dfrac{۲x+۶}{۷}\to y=-\dfrac{۲x+۶}{۷}\xrightarrow{\times(-۷)}-۷y=۲x+۶\xrightarrow{-۶}۲x=-۷y-۶ \\ \xrightarrow{\div ۲}x=\dfrac{-۷y-۶}{۲}=\dfrac{-۷}{۲}y-۳\xrightarrow{\text{حالا}}g^{-۱}(x)=\dfrac{-۷}{۲}x-۳\longrightarrow g^{-۱}(x)=f(x)\checkmark \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} f(x)=-\sqrt{x-۸} \\ g(x)=۸+x^۲\ ;\ x\le ۰\to y=۸+x^۲\xrightarrow{-۸}x^۲=y-۸\xrightarrow{\text{جذر}}|x|=\sqrt{y-۸} \\ \xrightarrow[|x|=-x]{\text{با توجه به } x\le ۰}-x=\sqrt{y-۸}\to x=-\sqrt{y-۸}\xrightarrow{\text{حالا}}g^{-۱}(x)=-\sqrt{x-۸}=f(x)\checkmark \end{cases}$$

سخت

۱۱ بیایید ابتدا توابع $g=f^۲+f$ و $f^{-۱}$ را باتوجه به اعضای تابع f به‌دست آوریم:

$$g=f^۲+f=\{(-۱,۱^۲+۱),(۱,(-۱)^۲+(-۱)),(۲,۰^۲+۰),(۴,(-۲)^۲+(-۲))\}$$

$$=\{(-۱,۲),(۱,۰),(۲,۰),(۴,۲)\}\ ,\ f^{-۱}=\{(۱,-۱),(-۱,۱),(۰,۲),(-۲,۴)\}$$

اکنون با توجه به تعریف تابع ترکیب و نیز دامنه‌های $h=fog$ و $k=gof^{-۱}$، اعضای این توابع را به‌دست می‌آوریم:

$$D_h=D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{-۱,۴\}\ ,\ D_k=D_{gof^{-۱}}=\{x\in D_{f^{-۱}}|f^{-۱}(x)\in D_g\}$$

$$=\{۱,-۱,۰,-۲\}$$

$$h=fog=\{(-۱,f(g(-۱))),(۴,f(g(۴)))\}=\{(-۱,f(۲)),(۴,f(۲))\}=\{(-۱,۰),(۴,۰)\}$$

$$k=gof^{-۱}=\{(۱,gof^{-۱}(۱)),(-۱,gof^{-۱}(-۱)),(۰,gof^{-۱}(۰)),(-۲,gof^{-۱}(-۲))\}$$

$$=\{(۱,g(-۱)),(-۱,g(۱)),(۰,g(۲)),(-۲,g(۴))\}=\{(۱,۲),(-۱,۰),(۰,۰),(-۲,۲)\}$$

سخت

۱۲ ابتدا باید تابع $g=f^۲+f$ را به‌دست آوریم. دامنهٔ این تابع همان دامنهٔ f می‌باشد. (زیرا: $D_{f^۲}=D_f$ و $D_g=D_{f^۲}\cap D_f=D_f$)

$$g=f^۲+f=\{(-۱,f^۲(-۱)+f(-۱)),(۲,f^۲(۲)+f(۲)),(۰,f^۲(۰)+f(۰)),(۶,f^۲(۶)+f(۶))\}$$
$$=\{(-۱,۱۲),(۲,۰),(۰,۶),(۶,۰)\}$$

در ادامه تابع ترکیب $h=gof$ را باتوجه به تعریف و دامنهٔ تابع gof محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$D_h=D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{۲,۰,۶\}$$

$$h=gof=?\begin{cases} gof(۲)=g(f(۲))=g(-۱)=۱۲(۲\xrightarrow{f}-۱\xrightarrow{g}۱۲:۲\xrightarrow{gof}۱۲) \\ gof(۰)=g(f(۰))=g(۲)=۰(۰\xrightarrow{f}۲\xrightarrow{g}۰:۰\xrightarrow{gof}۰) \\ gof(۶)=g(f(۶))=g(۰)=۶(۶\xrightarrow{f}۰\xrightarrow{g}۶:۶\xrightarrow{gof}۶) \end{cases}$$

بنابراین تابع h به‌صورت $h=\{(۲,۱۲),(۰,۰),(۶,۶)\}$ است.

حتماً درک کرده‌اید که:

$$gof(-۱)=g(f(-۱))=g(۳)=x\xrightarrow{\text{زیرا}}۳\notin D_g$$

سخت

۱۳ ابتدا توجه داریم که: $R_g=\{-۱,۲,۱,-۲\}$ و $D_g=\{۳,۰,۴,۱\}$ و $D_f=\mathbb{R}-\{-۲\}$

اکنون با توجه به تعریف‌های $fog(x)=f(g(x))$ و $D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}$، درمی‌یابیم که تابع fog روی آن‌دسته از دامنه‌های g اثر می‌کند که برد متناظر با آن دامنه متعلق به دامنهٔ تابع f بوده باشد. براین اساس داریم:

$$fog(۳)=f(g(۳))=f(-۱)\overset{\text{ضابطهٔ } f}{=\!=\!=}\frac{۲(-۱)-۱}{-۱+۲}=-۳(۳\xrightarrow{g}-۱\xrightarrow{f}-۳:۳\xrightarrow{fog}-۳)$$

$$fog(۰)=f(g(۰))=f(۲)\overset{\text{ضابطهٔ } f}{=\!=\!=}\frac{۲(۲)-۱}{۲+۲}=\frac{۳}{۴}(۰\xrightarrow{g}۲\xrightarrow{f}\frac{۳}{۴}:۰\xrightarrow{fog}\frac{۳}{۴})$$

$$fog(۴)=f(g(۴))=f(۱)\overset{\text{ضابطهٔ } f}{=\!=\!=}\frac{۲(۱)-۱}{۱+۲}=\frac{۱}{۳}(۴\xrightarrow{g}۱\xrightarrow{f}\frac{۱}{۳}:۴\xrightarrow{fog}\frac{۱}{۳})$$

$$fog(۱) = f(g(۱)) = f(-۲) = \frac{۲(-۲)-۱}{-۲+۲} = \frac{-۵}{۰} \quad \times \quad (-۲ \notin D_f)$$

بنابراین می‌بینیم که $D_{fog} = \{۳, ۰, ۴\}$، $R_{fog} = \{-۳, \frac{۳}{۴}, \frac{۱}{۳}\}$ و لذا $fog = \{(۳,-۳), (۰, \frac{۳}{۴}), (۴, \frac{۱}{۳})\}$ می‌باشد.

سخت

۱۴ برای تابع مرکب $gof^{-۱}$ نیاز به توابع $f^{-۱}$ و g داریم. تابع $f^{-۱}$ را می‌توانیم از روی تابع f و با جابه‌جا کردن جای مؤلفه‌های آن به‌دست آوریم:

$$f^{-۱} = \{(-۱,۴), (۱,۳), (۲,۵)\} \quad , \quad g = \{(-۱,۲), (۴,۰), (۵,۳)\}$$

$$\begin{cases} gof^{-۱}(-۱) = g(f^{-۱}(-۱)) = g(۴) = ۰ \;\; (-۱ \xrightarrow{f^{-۱}} ۴ \xrightarrow{g} ۰ : \; -۱ \xrightarrow{gof^{-۱}} ۰) \\ gof^{-۱}(۱) = g(f^{-۱}(۱)) = g(۳) \;\; \times \;\; (\text{زیرا} : ۳ \notin D_g) \\ gof^{-۱}(۲) = g(f^{-۱}(۲)) = g(۵) = ۳ \;\; (۲ \xrightarrow{f^{-۱}} ۵ \xrightarrow{g} ۳ : \; ۲ \xrightarrow{gof^{-۱}} ۳) \end{cases}$$

$$\to gof^{-۱} = \{(-۱,۰), (۲,۳)\}$$

و حالا برای تابع مرکب $fog^{-۱}$ داریم:

$$g^{-۱} = \{(۲,-۱), (۰,۴), (۳,۵)\} \; , \; f = \{(۴,-۱), (۳,۱), (۵,۲)\}$$

$$\begin{cases} fog^{-۱}(۲) = f(g^{-۱}(۲)) = f(-۱) \;\; \times \;\; (-۱ \notin D_f) \\ fog^{-۱}(۰) = f(g^{-۱}(۰)) = f(۴) = -۱ \;\; (۰ \xrightarrow{g^{-۱}} ۴ \xrightarrow{f} -۱ : \; ۰ \xrightarrow{fog^{-۱}} -۱) \\ fog^{-۱}(۳) = f(g^{-۱}(۳)) = f(۵) = ۲ \;\; (۳ \xrightarrow{g^{-۱}} ۵ \xrightarrow{f} ۲ : \; ۳ \xrightarrow{fog^{-۱}} ۲) \end{cases}$$

$$\to fog^{-۱} = \{(۰,-۱), (۳,۲)\}$$

سخت

۱۵ تابع f اکیداً صعودی است. بنابراین برای هر a و b از دامنهٔ f، اگر $a > b$ باشد می‌توان نوشت:

$$a > b \to f(a) > f(b) \xrightarrow{\text{حال اکیداً صعودی بودن } g \text{ را اعمال می‌کنیم.}} g(f(a)) > g(f(b))$$

$$\xrightarrow{\text{براساس تعریف تابع ترکیب } gof} gof(a) > gof(b) \to \text{ اکیداً صعودی است.} \; gof$$

این‌بار اکیداً صعودی بودن را با g آغاز می‌کنیم. برای هر a و b از دامنهٔ g، اگر $a > b$ باشد می‌توان نوشت:

$$a > b \to g(a) > g(b) \xrightarrow{\text{حال اکیداً صعودی بودن } f \text{ را اعمال می‌کنیم.}} f(g(a)) > f(g(b))$$

$$\xrightarrow{\text{براساس تعریف تابع ترکیب } fog} fog(a) > fog(b) \to \text{ اکیداً صعودی است.} \; fog$$

سخت

۱۶ اگر تابع h را به شکل $h(x) = ۹^x - ۳^{x+۱} = (۳^x)^۲ - ۳ \times ۳^x$ بازنویسی کنیم به روشنی می‌توانیم ببینیم که با فرض $f(x) = x^۲ - ۳x$ و $g(x) = ۳^x$، تابع ترکیب $fog(x)$ همان تابع $h(x)$ خواهد بود.:

$$\begin{cases} f(x) = x^۲ - ۳x \\ g(x) = ۳^x \end{cases} \to fog(x) = f(g(x)) = f(۳^x) = (۳^x)^۲ - ۳(۳^x)$$

$$= (۳^۲)^x - ۳^{۱+x} = ۹^x - ۳^{x+۱} = h(x)$$

سخت

۱۷ هرتابع مانند $h(x) = x^۲ + x$ را می‌توان به روش‌های مختلف به‌صورت ترکیب دو تابع نوشت. یعنی این عمل منحصربه‌فرد نیست. مثلاً در این‌جا تابع h را می‌توانیم در دو حالت از ترکیب تابع‌های f و g به‌دست آوریم. داریم:

$$۱) \begin{cases} f(x) = \sqrt[۳]{x} \\ g(x) = x^۶ + x^۳ \end{cases} \to \begin{aligned} & gof(x) = g(f(x)) = g(\sqrt[۳]{x}) = (\sqrt[۳]{x})^۶ + (\sqrt[۳]{x})^۳ \\ & = \sqrt[۳]{x^۶} + \sqrt[۳]{x^۳} = x^۲ + x = h(x) \end{aligned}$$

$$۲) \begin{cases} f(x) = x^۲ - \frac{۱}{۴} \\ g(x) = x + \frac{۱}{۲} \end{cases} \to \begin{aligned} & fog(x) = f(g(x)) = f(x + \frac{۱}{۲}) = (x + \frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۴} \\ & = x^۲ + x + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} = x^۲ + x = h(x) \end{aligned}$$

سخت

۱۸ ابتدا اکیداً صعودی بودن fog را باتوجه به شرایط مسأله اثبات می‌کنیم. برای هر a و b از D_g، اگر $a > b$، آن‌گاه داریم:

$$a > b \xrightarrow{g \text{ اکیداً صعودی}} g(a) > g(b) \xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}} f(g(a)) > f(g(b))$$

$$\to fog(a) > fog(b) \to \text{ اکیداً صعودی است.} \; fog$$

سپس با فرض $h = fog$ و توجه به رابطهٔ $h^{-۱} = (fog)^{-۱} = g^{-۱}of^{-۱}$ و با درنظر گرفتن این نکته که معکوس هر تابع اکیداً صعودی خود نیز اکیداً صعودی است، اکیداً صعودی بودن $h^{-۱} = g^{-۱}of^{-۱}$ باتوجه به اکیداً صعودی بودن $h = fog$ به‌راحتی قابل توجیه خواهد بود.

همین روند را می‌توان درمورد تابع ترکیب و اکیداً صعودی $h = gof$ نیز انجام داد. تابع $h = gof$ به‌دلیل اکیداً صعودی بودن توابع f و g اکیداً صعودی بوده و معکوس آن یعنی

$h^{-۱}=(gof)^{-۱}=f^{-۱}og^{-۱}$ نیز اکیداً صعودی خواهد بود.

سخت

۱۹ در هر حالت تابع‌های ترکیب fog و gof را به‌دست آورده و باتوجه به دامنهٔ مربوطه ساده می‌کنیم تا معلوم شود در کدام مورد تابع h به‌دست می‌آید:

الف)
$$\begin{cases} fog(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x-۲})=(\sqrt{x-۲})^{۲}\overset{(x\geq ۲)}{=\!=\!=}x-۲=h(x) \\ gof(x)=g(f(x))=g(x^{۲})=\sqrt{x^{۲}-۲}\neq h(x)\end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} fog(x)=f(g(x))=f((x-۲)^{۲})=\sqrt{(x-۲)^{۲}}\overset{\sqrt{u^{۲}}=|u|}{=\!=\!=}|x-۲|\neq h(x) \\ gof(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=(\sqrt{x}-۲)^{۲}\overset{(x\geq ۰)}{=\!=\!=}x-۴\sqrt{x}+۴\neq h(x)\end{cases}$$

بنابراین تابع $h(x)=x-۲$ را می‌توان از ترکیب توابع $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-۲}$ به‌صورت $h(x)=fog(x)$ به‌دست آورد.

سخت

۲۰ باتوجه به رابطهٔ ۲ $f^{-۱}(g^{-۱}of^{-۱}(۰))=۲$ و با فرض $a=g^{-۱}of^{-۱}(۰)$ داریم:

$$f^{-۱}(a)=۲\rightarrow a=f(۲)\xrightarrow{\text{از ضابطهٔ } f}a=۴-۶=-۲\rightarrow g^{-۱}of^{-۱}(۰)=-۲$$

اکنون باتوجه به رابطهٔ $g^{-۱}(f^{-۱}(۰))=-۲$ و با فرض $f^{-۱}(۰)=b$ داریم:

$$g^{-۱}(b)=-۲\rightarrow b=g(-۲)\xrightarrow{\text{از ضابطهٔ } g}b=۴-۲m\rightarrow f^{-۱}(۰)=۴-۲m\rightarrow f(۴-۲m)=۰$$

$$\xrightarrow{\text{از ضابطهٔ } f}(۴-۲m)^{۲}-۳(۴-۲m)=۰\xrightarrow{\text{فاکتور از } (۴-۲m)}(۴-۲m)(۴-۲m-۳)=۰$$

$$\rightarrow(۴-۲m)(۱-۲m)=۰\xrightarrow{\text{ویژگی حاصل‌ضرب صفر}}\begin{cases}۴-۲m=۰\\ \text{یا}\\ ۱-۲m=۰\end{cases}\rightarrow\begin{cases}m=۲\\ \text{یا}\\ m=\dfrac{۱}{۲}\end{cases}$$

سخت

۲۱ ابتدا باید ضابطهٔ $f^{-۱}$ را به‌دست آوریم:

$$f(x)=x+۱:y=x+۱\rightarrow x=y-۱\rightarrow f^{-۱}(x)=x-۱$$

حال تابع ترکیب $gof^{-۱}$ را تشکیل داده و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases}g(x)=۲x^{۲}-۳x\\ f^{-۱}(x)=x-۱\end{cases}\rightarrow(gof^{-۱})(x)=g(f^{-۱}(x))=g(x-۱)=۲(x-۱)^{۲}-۳(x-۱)=۰$$

$$\xrightarrow[\text{فاکتور می‌گیریم.}]{\text{از } (x-۱)}(x-۱)(۲(x-۱)-۳)=۰\rightarrow\begin{cases}x-۱=۰\rightarrow x=۱\\ \text{یا}\\ ۲(x-۱)-۳=۰\rightarrow x-۱=\dfrac{۳}{۲}\rightarrow x=\dfrac{۵}{۲}\end{cases}$$

بنابراین $x=۱$ و $x=\dfrac{۵}{۲}$، صفرها یا ریشه‌های تابع $gof^{-۱}$ هستند.

سخت

۲۲ در نگاه اول ممکن است باتوجه به وجود روابط $fof^{-۱}(x)=x$ و $f^{-۱}of(x)=x$ تصور کنیم که توابع $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ به‌دلیل همانی بودن، همواره باهم برابرند که البته تصور غلطی است. حقیقت در دامنهٔ این توابع نهان است.

$$D_{fof^{-۱}}=\{x\in D_{f^{-۱}}|f^{-۱}(x)\in D_f\}\ ,\ D_{f^{-۱}of}=\{x\in D_f|f(x)\in D_{f^{-۱}}\}$$

با دقت روی این دامنه‌ها درمی‌یابیم در رابطهٔ $fof^{-۱}(x)=x$، x از دامنهٔ $f^{-۱}$ (به‌شرطی‌که $f^{-۱}(x)$ متعلق به دامنهٔ f باشد) انتخاب می‌شود و درحالی‌که در رابطهٔ $f^{-۱}of(x)=x$، x از دامنهٔ f (با این شرط که $f(x)\in D_{f^{-۱}}$ است) انتخاب می‌شود. پس اگر دامنه و برد تابع وارون‌پذیر f باهم برابر باشند ($D_f=R_f$) توابع ترکیب $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ نیز باهم برابر می‌شوند.

به‌عبارت دیگر اگر تابع f همانی باشد، تابع‌های $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ باهم برابر خواهند بود. مثلاً برای $f=\{(۱,۱),(۲,۲),(۰,۰)\}$ داریم:

$$f^{-۱}=\{(۱,۱),(۲,۲),(۰,۰)\}\rightarrow fof^{-۱}=f^{-۱}of=\{(۱,۱),(۲,۲),(۰,۰)\}$$

سخت

۲۳ باتوجه به رابطهٔ ۲ $f^{-۱}og(m)=f^{-۱}(g(m))=۲$، ابتدا مقدار $g(m)$ را (به‌صورت پارامتری) از روی ضابطهٔ g به‌دست می‌آوریم:

یعنی برای $m>۰$، $g(m)$ برابر $m^{۲}+۱$ و برای $m\leq ۰$ برابر $m^{۲}-۱$ است.
$$g(m)=\begin{cases}m^{۲}+۱ & ;m>۰\\ m^{۲}-۱ & ;m\leq ۰\end{cases}$$

درنتیجه آن رابطهٔ اولیه به‌صورت $f^{-۱}(m^{۲}+۱)=۲$ (برای $m>۰$) یا $f^{-۱}(m^{۲}-۱)=۲$ (برای $m\leq ۰$) تبدیل خواهد شد. حال باتوجه به این نکته که «اگر $f^{-۱}(a)=b$، آن‌گاه $f(b)=a$ برقرار است.» داریم:

$$\begin{cases}m>۰ \text{ برای }: & f(۲)=m^{۲}+۱\\ m\leq ۰ \text{ برای }: & f(۲)=m^{۲}-۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow[(۲,۰)\in f]{\text{از روی مجموعهٔ } f}\begin{cases}m>۰ \text{ برای }: & m^{۲}+۱=۰\rightarrow m^{۲}=-۱\rightarrow \text{فاقد جواب}\\ m\leq ۰ \text{ برای }: & m^{۲}-۱=۰\rightarrow m^{۲}=۱\rightarrow m=\pm ۱\xrightarrow{(m\leq ۰)}m=-۱\ ✓\end{cases}$$

بنابراین تنها جواب قابل قبول برای m همان -۱ بوده و داریم: $f^{-۱}og(-۱)=۲$

سخت

۲۴ دامنهٔ تابع gof باتوجه به تعریف $gof(x)=g(f(x))$ از دستور $D_{gof}=\{x\in D_f | f(x)\in D_g\}$ به‌دست می‌آید. به‌عبارت دیگر دامنهٔ gof، آن قسمت از دامنهٔ f را شامل می شود که به‌ازای آن‌ها، $f(x)$ متعلق به دامنهٔ g باشد. در این‌جا باتوجه به نمودار داریم:

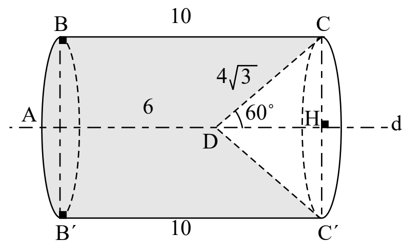
$$D_f=[-۳,۰]\ ,\ R_f=[۰,\frac{۵}{۲}]\ ,\ D_g=[۰,\frac{۵}{۲}]$$

$$D_{gof}=\{x\in[-۳,۰] | f(x)\in[۰,\frac{۵}{۲}]\}=[-۳,۰]$$

دامنهٔ gof همان دامنهٔ f و برابر $[-۳,۰]$ است. زیرا به‌ازای تمام اعضای این بازه، مقادیر تابع f متعلق به $D_g=[۰,\frac{۵}{۲}]$ می‌باشد. مقادیر f همان $R_f=[۰,\frac{۵}{۲}]$ است.

سخت

۲۵ حجم حاصل مطابق شکل برابر است با:



$$\overset{\triangle}{DHC}: CH=\sin ۶۰^\circ\times DC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۴\sqrt{۳}=۶$$

$$DH=\cos ۶۰^\circ\times DC=\frac{۱}{۲}\times ۴\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}$$

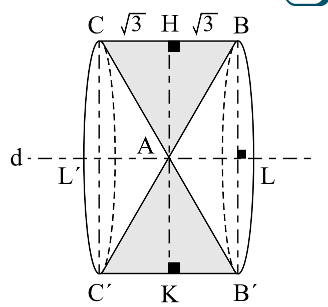
$$V=V_{\text{استوانه}}-V_{\text{مخروط}}$$

$$V=\pi\times ۶^۲\times ۱۰-\frac{۱}{۳}\pi\times ۶^۲\times ۲\sqrt{۳}=۳۶۰\pi-۲۴\sqrt{۳}\pi$$

نکته: حجم استوانه به شعاع r و ارتفاع h برابر $\pi r^۲h$ و حجم مخروط به شعاع r و ارتفاع h برابر $\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$ است.

سخت

۲۶ حجم حاصل استوانه‌ای خالی از دو مخروط می‌باشد.



$$AH=\sin ۶۰^\circ\times AC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۲\sqrt{۳}=۳$$

$$\Rightarrow BL=B'L=CL=C'L'=۳$$

$$V=V_{\text{استوانه}}-۲\times V_{\text{مخروط}}$$

$$V=\pi\times ۳^۲\times ۲\sqrt{۳}-۲\times\frac{۱}{۳}\pi\times ۳^۲\times\sqrt{۳}=۱۸\sqrt{۳}\pi-۶\sqrt{۳}\pi$$

$$\Rightarrow V=۱۲\sqrt{۳}\pi$$

نکته: حجم استوانه به شعاع r و ارتفاع h برابر با $\pi r^۲h$ است و حجم مخروط به شعاع r و ارتفاع h برابر است با: $\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$

سخت

۲۷

$$AA'=۲a\to ۲a=۴-(-۴)\to ۲a=۸\to a=۴$$

طبق فرض : $۲b=\frac{۳}{۴}۲c\to b=\frac{۳}{۴}c\to ۳c=۴b\to c=\frac{۴}{۳}b$

$$c^۲=a^۲-b^۲\to\frac{۱۶}{۹}b^۲=۱۶-b^۲\to\frac{۲۵}{۹}b^۲=۱۶$$

$$\to ۲۵b^۲=۹\times ۱۶\to b^۲=\frac{۹\times ۱۶}{۲۵}\to b=\frac{۳\times ۴}{۵}\to b=\frac{۱۲}{۵}$$

قطر کوچک $\to ۲b=\frac{۲۴}{۵}$

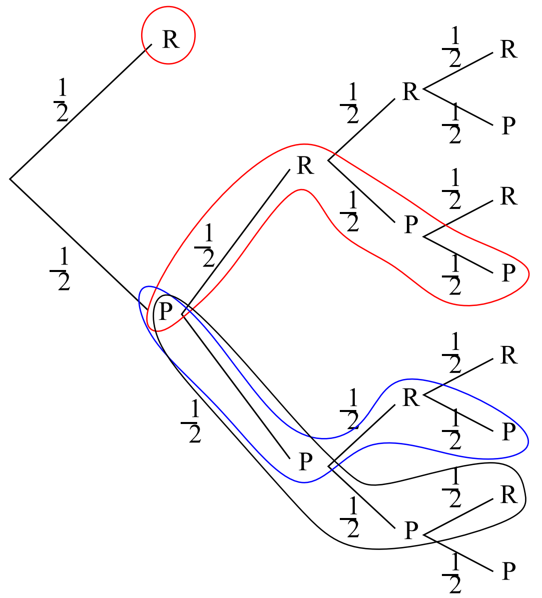
فاصلهٔ کانونی $\xrightarrow{c=\frac{۴}{۳}b} c=\frac{۴}{۳}(\frac{۱۲}{۵}) \to c=\frac{۱۶}{۵} \to ۲c=\frac{۳۲}{۵}$

ازطرفی: $e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{۱۶}{۵}}{۴}=\frac{۱۶}{۲۰}=\frac{۴}{۵}$

سخت

۲۸

«رو» را با R و «پشت» را با P نشان می‌دهیم:



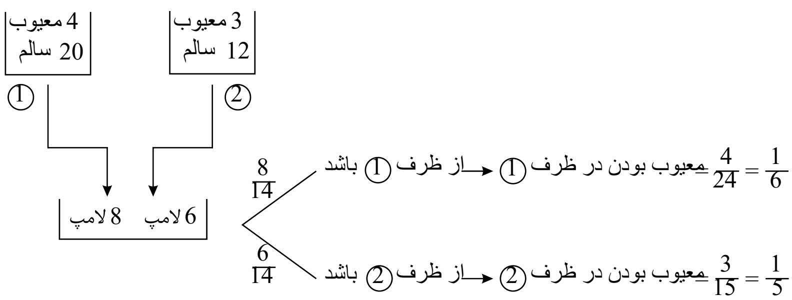
حالت مطلوب: $R\,,\ PRPP\,,\ PPRP\,,\ PPPR$

$\to$ احتمال مطلوب $=\frac{۱}{۲}+(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})+(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})+(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})$

$=\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۱۶}=\frac{۱۱}{۱۶}$

سخت

۲۹



$P(\text{معیوب بودن})=\frac{۴}{۷}\times\frac{۱}{۶}+\frac{۳}{۷}\times\frac{۱}{۵}=\frac{۲}{۲۱}+\frac{۳}{۳۵}=\frac{۱۰+۹}{۳\times۷\times۵}=\frac{۱۹}{۱۰۵}$

سخت

۳۰

توجه کنید که $AF=a-c$ و $OB=b$ و $OA'=a$ است.

$S_{\overset{\triangle}{A'OB}}=۳S_{\overset{\triangle}{BAF}} \to \frac{۱}{۲}OB\cdot OA'=۳\times\frac{۱}{۲}OB\cdot AF$

$\to OA'=۳AF \to a=۳(a-c) \to a=۳a-۳c \to ۲a=۳c \to a=\frac{۳}{۲}c$

$$e=\frac{c}{a}\to e=\frac{c}{\frac{۳}{۲}c}\to e=\frac{۲}{۳}$$

$$\text{طول قطر کوچک}=۴\to ۲b=۴\to b=۲$$

$$c^۲=a^۲-b^۲\to c^۲=\frac{۹}{۴}c^۲-۴\to ۴=\frac{۵}{۴}c^۲\to ۵c^۲=۱۶$$

$$\to c^۲=\frac{۱۶}{۵}\to c=\frac{۴}{\sqrt{۵}}=\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}\xrightarrow{a=\frac{۳}{۲}c}a=\frac{۳}{۲}\times\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}=\frac{۶\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\to \text{قطر بزرگ}=۲a=\frac{۱۲\sqrt{۵}}{۵}$$

سخت