نام و نام خانوادگی:

تعداد سوال: ۳۰

نام آزمون: هندسه دوازدهم تکمیلی تشریحی

زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه

افشار

مرکز مشاوره تحصیلی دکتر علیرضا افشار

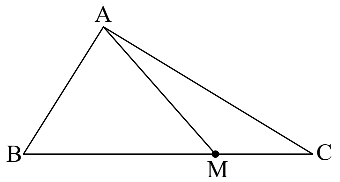
۱) فرض کنید بتوان یک ماتریس ۳×۳ مانند A را به صورت حاصلضرب یک ماتریس ۳×۲ در یک ماتریس ۲×۳ نوشت. ثابت کنید $|A|=۰$.

۲) مقدار b و a را چنان بیابید که نقاط $A(۱,۲a-۱,-۲)$، $B(b-۱,a-b,۴)$ و $C(۱,۲,۱)$ تشکیل مثلث ندهند.

۳) بردار $\vec{a}'$ قرینهٔ بردار $\vec{a}(۳,-۱,-۲)$ نسبت به محور yها و بردار $\vec{b}'$ قرینهٔ بردار $b(m_۱,n_۱-۱)$ نسبت به محور xهاست. اگر b' در امتداد a' باشد، اندازهٔ بردار $a'+۲b'$ کدام است؟

۴) دو بردار $a=(۰,۰,-۴)$ و $b=(-۲,۱,۲)$ در فضا مفروض‌اند. برداری به طول $۴\sqrt{۶}$ را به‌دست آورید که در خلاف راستای نیمساز داخلی زاویهٔ بین دو بردار a و b باشد.

۵) در شکل مقابل اگر $\overrightarrow{BM}=۴\overrightarrow{MC}$، ثابت کنید: $\overrightarrow{AM}=\frac{۱}{۵}\overrightarrow{AB}+\frac{۴}{۵}\overrightarrow{AC}$



۶) فرض کنید $A(-۳,۶,۲)$، $B(۲,۱,۲)$ و C نقطه‌ای روی پاره‌خط AB باشد. اگر $|AC|=۴|BC|$، مختصات نقطهٔ C را به‌دست آورید.

۷) اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ در این‌صورت اعداد حقیقی a و b و c و d را چنان بیابید که تساوی $|A|^۲-۵|A|+۶=۰$ برقرار باشد.

۸) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $(A+I)^۶=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ حاصل $a-b$ را به‌دست آورید.

۹) قضیهٔ یکتایی وارون: وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود، منحصر به فرد است.

۱۰) اگر $A^۲=A$ و m یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید:

$$(I-mA)^{-۱}=I+\frac{m}{۱-m}A$$

۱۱) نقاط $A(-۱,-۱)$ و $B(۱,۱)$ و $C(۱,-۳)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادله دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادله مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید.

۱۲) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰,۱)$ بوده و با دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x-۶y=۳$ مماس داخل باشد.

۱۳) M روی یک بیضی با کانون‌های F و F' به گونه‌ای قرار دارد که MF و MF' بر هم عمودند. ثابت کنید: $MF\times MF'=۲b^۲$

۱۴) ثابت کنید در هر بیضی طول کوتاه‌ترین وتر کانونی برابر است با: $MN=\frac{۲b^۲}{a}$

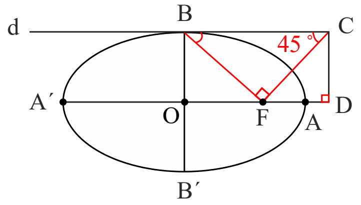
۱۵) ثابت کنید مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو دایره متداخل $C_۱(O_۱,R_۱)$ و $C_۲(O_۲,R_۲)$ مماس‌اند. یک بیضی می‌باشد.

۱۶) دو نقطهٔ A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر $AF'=BF$ باشد، نشان دهید:

الف) در حالتی که دو پاره‌خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند با هم موازی‌اند.

ب) در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.

۱۷ در بیضی مقابل AA' و BB' در قطراند. خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است. پاره‌خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F = ۴۵^\circ$، مقدار $\dfrac{AD}{AF}$ را به‌دست آورید.

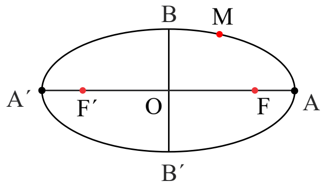


۱۸ نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$.

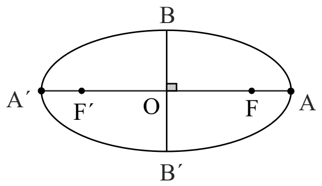
ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ت) طول‌های MF و MF' را به‌دست آورید.



$OA = ۵ , OB = ۳ , OF = ۴$

۱۹ در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ زاویهٔ FBF' چند درجه است؟

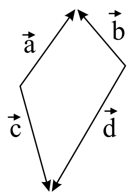


۲۰ ثابت کنید خط $y = -\dfrac{۱}{۲}x + \dfrac{۳}{۲}$ بر سهمی به معادلهٔ $y^۲ - ۲y + x + ۱ = ۰$ مماس است و مختصات نقطهٔ تماس را بیابید.

۲۱ سهمی $y^۲ = ۴x - ۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۲۲ فرض کنید زاویهٔ بین دو بردار a و b حاده بوده و $|a| = ۲$ و $|b| = \sqrt{۲}$ باشد. اگر $|۲a + b|^۲ = ۱۲a \cdot b$، اندازهٔ تصویر قائم بردار a در امتداد بردار b را به‌دست آورید.

۲۳ اگر در شکل مقابل $|a| = ۲$، $|b| = ۱$، $|c| = ۳$ و $|d| = ۴$ باشد، حاصل عبارت $b \cdot d + c \cdot d - b \cdot c$ را به‌دست آورید.



۲۴ دو نقطهٔ $A(۱,۲,-۱)$ و $B(۳,۰,۱)$ مفروض‌اند. اگر نقطهٔ M در فضا بوده به طوری که $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = ۱۳$، فاصلهٔ نقطهٔ M تا نقطهٔ $N(۲,۱,۰)$ را به‌دست آورید.

۲۵ اگر $۸x + ۱۵y + z = ۳$، کمترین مقدار عبارت $۱۶x^۲ + ۲۵y^۲ + ۲z^۲$ را به‌دست آورید.

۲۶ اگر زاویهٔ دو بردار u و v با محور xها به‌ترتیب $\dfrac{۳\pi}{۴}$ و $\dfrac{\pi}{۳}$ بوده و $|u| = \sqrt{۲}$ و $|v| = ۲$ باشند، اندازهٔ تصویر بردار $u + v$ روی محور xها را به‌دست آورید.

۲۷ بردارهای $a = (۱,۲,۰)$ و $b = (۲,۱,۳)$ و $c = (-۱,۴,۱)$ قطرهای وجوه مجاور یک متوازی‌السطوح هستند که همگی از یک نقطه می‌گذرند، مقدار حجم آن را به‌دست آورید.

۲۸ اگر $|a| = ۳$ و $|b| = ۴$ و اندازهٔ تصویر قائم بردار a بر امتداد بردار b برابر ۲ باشد، مساحت مثلث ساخته شده روی دو بردار $۲a + ۳b$ و $b - ۲a$ را به‌دست آورید.

۲۹ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش روی خط $y = ۲x$ باشد و از دو نقطهٔ $A(۱, -۲)$ و $B(۳, ۰)$ بگذرد.

۳۰ مرکز دایرهٔ C به شعاع ۳ روی خط $y = x$ قرار دارد. اگر این دایره از نقطهٔ $A(-\sqrt{۲}, \sqrt{۲})$ بگذرد معادلهٔ آنرا بنویسید.

پاسخنامه تشریحی

۱ فرض کنیم $B=\begin{bmatrix} x & y \\ p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ در این صورت داریم:

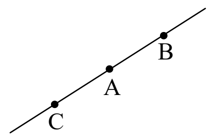
$$A=B\times C\Rightarrow |A|=|BC|=\left|\begin{bmatrix} x & y \\ p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix} x & y & ۰ \\ p & q & ۰ \\ r & s & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{bmatrix} x & y & ۰ \\ p & q & ۰ \\ r & s & ۰ \end{bmatrix}\right|\left|\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\right|=۰\times ۰=۰$$

سخت

۲ چون سه نقطهٔ $A(۱,۲a-۱,-۲)$، $B(b-۱,a-b,۴)$ و $C(۱,۲,۱)$ تشکیل مثلث نمی‌دهند یعنی در یک راستا قرار دارند. بنابراین:

$$\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}\Rightarrow(۰,۲a-۳,-۳)||(b-۲,a-b-۲,۳)$$



از آن‌جا که مؤلفهٔ اول $\overrightarrow{CA}$ صفر است باید مؤلفهٔ اول $\overrightarrow{CB}$ نیز صفر باشد. (هر دو در صفحهٔ yoz قرار دارند.)

$$\Rightarrow\begin{cases} b-۲=۰\Rightarrow b=۲ \\ \dfrac{۲a-۳}{a-b-۲}=\dfrac{-۳}{۳}=-۱ \end{cases}\Rightarrow a=\frac{۷}{۳}$$

سخت

۳

$$\begin{cases} \vec{a}=(۳,-۱,-۲)\xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} a'=(-۳,-۱,۲) \\ \vec{b}=(m,n,-۱)\xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} b'=(m,-n,۱) \\ a'||b' \end{cases}\Rightarrow\frac{m}{-۳}=\frac{-n}{-۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow m=-\frac{۳}{۲}\quad,\quad n=\frac{۱}{۲}\quad\Rightarrow\quad b'=(-\frac{۳}{۲},-\frac{۱}{۲},۱)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{a'}+۲\overrightarrow{b'}=(-۶,-۲,۴)\ \Rightarrow\ |a'+۲b'|=\sqrt{۳۶+۴+۱۶}=\sqrt{۵۶}=۲\sqrt{۱۴}$$

سخت

۴

$$\begin{cases} a=(۰,۰,-۴)\,,\ b=(-۲,۱,۲)\ ,\ |a|=۴\ ,\ \ |b|=۳ \\ \text{بردار در راستای نیمساز داخلی}\ =|b|\vec{a}+|a|\vec{b}=۳\vec{a}+۴\vec{b}=(-۸,۴,-۴)=۴(-۲,۱,-۱) \end{cases}$$

به‌ازای هر عدد حقیقی r، هر مضربی از $۳a+۴b$ به فرم $r(۳a+۴b)$ نیز در راستای نیمساز داخلی و بردار a دو b است.

$$\Rightarrow|r(۳a+۴b)|=۴\sqrt{۶}\Rightarrow|۴r(-۲,۱,-۱)|=۴\sqrt{۶}\ ,\ \ |(-۲,۱,-۱)|=\sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow|r|=۱\ \ \Rightarrow\ \ r=\begin{cases} ۱ & \text{غقق} \\ -۱\rightarrow & \text{ق ق (زیرا طبق فرض بردار خلاف راستا مورد نظر است.)} \end{cases}$$

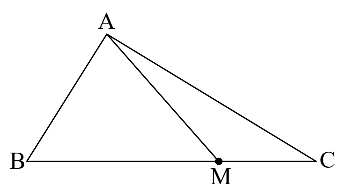
$$\Rightarrow r(۳a+۴b)=(۸,-۴,۴)$$

سخت

۵

$$\overrightarrow{BM}=۴\overrightarrow{MC}\xrightarrow{A\ \text{نقطه‌ای در فضا}}\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=۴(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM})$$

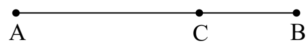
$$\Rightarrow ۵\,\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+۴\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{۱}{۵}\overrightarrow{AB}+\frac{۴}{۵}\overrightarrow{AC}$$



سخت

۶

$A(-۳,۶,۲)\ ,\ \ B(۲,۱,۲)\ ,\ \ |AC| = ۴\,|BC|$



$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = ۴\overrightarrow{CB} \Rightarrow C - A = ۴B - ۴C$$

$$\Rightarrow ۵C = A + ۴B \Rightarrow C = \frac{۱}{۵}(A + ۴B) = \frac{۱}{۵}(۵, ۱۰, ۱۰) = (۱, ۲, ۲)$$

سخت

۷

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad |A|^۲ - ۵\,|A| + ۶ = ۰ \rightarrow (|A| - ۲)(|A| - ۳) = ۰$$

$$\rightarrow |A| = ۲ \xrightarrow[c=۱,d=۴]{a=۱,b=۲} \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۴ \end{vmatrix} = ۴ - ۲ = ۲$$

یا

$$|A| = ۳ \xrightarrow[c=۳,d=۳]{a=۲,b=۱} \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۳ \end{vmatrix} = ۶ - ۳ = ۳$$

سخت

۸

$$A + I = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \rightarrow a - b = ۲ - ۱ = ۱$$

$$(A + I)^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} \rightarrow a - b = ۵ - ۴ = ۱$$

$$(A + I)^۳ = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۴ & ۱۳ \\ ۱۳ & ۱۴ \end{bmatrix} \rightarrow a - b = ۱۴ - ۱۳ = ۱$$

همانطور که می‌بینید در تمام توان‌ها $a - b = ۱$ می‌باشد.

سخت

۹ فرض می‌کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند؛ ثابت می‌کنیم: $B = C$.

طبق فرض : $AB = BA = I$

طبق فرض : $AC = CA = I$

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

سخت

۱۰ باید ضرب $(I + \frac{m}{۱ - m}A)$ و $(I - mA)$ برابر I شود.

$$(I - mA)(I + \frac{m}{۱ - m}A) = I + \frac{m}{۱ - m}A - mA - \frac{m^۲A^۲}{۱ - m}$$

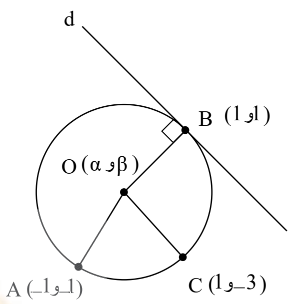
$$= I + \frac{m - m(۱ - m) - m^۲}{۱ - m}A = I + \frac{۰}{۱ - m}A = I$$

به‌همین ترتیب ثابت می‌شود $(I + \frac{m}{۱ - m}A)(I - mA)$ هم برابر I می‌شود.

سخت

۱۱

فاصلهٔ هریک از نقاط A، B و C تا مرکز برابر شعاع دایره است.



$$OA = OB \rightarrow \sqrt{(-۱ - \alpha)^۲ + (-۱ - \beta)^۲} = \sqrt{(۱ - \alpha)^۲ + (۱ - \beta)^۲}$$

$$\rightarrow (۱ + \alpha)^۲ + (۱ + \beta)^۲ = (۱ - \alpha)^۲ + (۱ - \beta)^۲$$

$$\rightarrow \cancel{۱} + ۲\alpha + \cancel{\alpha^۲} + \cancel{۱} + ۲\beta + \cancel{\beta^۲} = \cancel{۱} - ۲\alpha + \cancel{\alpha^۲} + \cancel{۱} - ۲\beta + \cancel{\beta^۲}$$

$$\rightarrow ۴\alpha + ۴\beta = ۰ \rightarrow \alpha + \beta = ۰ \quad (۱)$$

$$OB = OC \to \sqrt{(1-\alpha)^2 + (1-\beta)^2} = \sqrt{(1-\alpha)^2 + (-3-\beta)^2}$$

$$\to \cancel{1} + \cancel{\alpha^2} - \cancel{2\alpha} + 1 + \cancel{\beta^2} - 2\beta = 1 + \cancel{\alpha^2} - 2\alpha + 9 + \cancel{\beta^2} + 6\beta$$

$$\to 8\beta + 8 = 0 \to \beta = -1 \to \alpha = 1$$

مختصات مرکز $O(1,-1)$ $\quad R = OB = \sqrt{(1-1)^2 + (1-(-1))^2} = 2$

معادله دایره $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

شیب‌خط مماس در نقطهٔ B (m_d) معکوس قرینه شیب BO می‌باشد.

$$m_{BO} = \frac{-1-1}{1-1}$$

بنابراین شیب‌خط مماس بر دایره در نقطهٔ B صفر است. پس معادلهٔ خط مماس به‌صورت زیر می‌باشد:

معادلهٔ خط مماس $y - 1 = 0(x-1) \to y = 1$

سخت

۱۲

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \to O' = (-\frac{-4}{2}, -\frac{-6}{2}) = (2,3)$$

$$R' = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 - 4(-3)} = \frac{1}{2}\sqrt{16+36+12} = \frac{\sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

بررسی وضعیت مرکز $O(0,1)$ نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$:

مختصات مرکز را در معادله دایره جایگذاری می‌کنیم.

$$0^2 + 1^2 - (4\times 0) - (6\times 1) - 3 = 8 < 0$$

بنابراین O درون دایره قرار دارد و مسئله دو جواب دارد و دو دایره مماس داخل بر آن می‌توان رسم کرد.

طول خط‌المرکزین (OO') را به‌دست می‌آوریم.

$$OO' = \sqrt{(0-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

برای این‌که دو دایره مماس داخل باشند باید داشته باشیم:

$$OO' = |R - R'| \to 2\sqrt{2} = |R - 4| \to \begin{cases} R_1 - 4 = 2\sqrt{2} \to R_1 = 2\sqrt{2} + 4 \\ R_2 - 4 = -2\sqrt{2} \to R_2 = 4 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

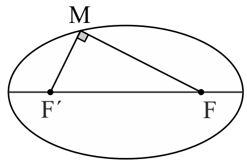
معادله دو دایره مماس داخل بر دایره داده شده در سؤال را در ادامه تشکیل می‌دهیم:

$$C_1 : (x-0)^2 + (y-1)^2 = (4 + 2\sqrt{2})^2$$

$$C_2 : (x-0)^2 + (y-1)^2 = (4 - 2\sqrt{2})^2$$

سخت

۱۳



$$MF + MF' = 2a$$

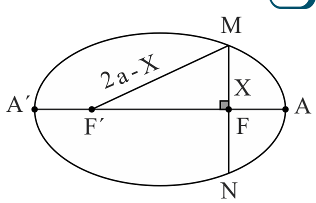
$$\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{طرفین معادله را به توان ۲}} (MF + MF')^2 = 4a^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \to MF^2 + MF'^2 + 2MF \times MF' = 4a^2 \\ \overset{\triangle}{MFF'} : MF^2 + MF'^2 = FF'^2 \to MF^2 + MF'^2 = 4c^2 \end{array}\right\} \to 4c^2 + 2MF \times MF' = 4a^2$$

$$\to 2MF \times MF' = 4(a^2 - c^2) = 4b^2 \to MF \times MF' = 2b^2$$

سخت

۱۴



$$MF = x$$

$$MF' + MF = 2a$$

$$\to MF' = 2a - x$$

$$\overset{\triangle}{MFF'} : FF'^2 + MF^2 = MF'^2 \to x^2 + (2c)^2 = (2a - x)^2$$

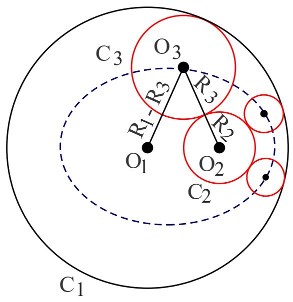
$$\left.\begin{array}{l} \to \cancel{x^2} + 4c^2 = 4a^2 + \cancel{x^2} - 4ax \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{array}\right\} \to 4c^2 = 4(b^2 + c^2) - 4ax$$

$$\rightarrow \cancel{۴c^۲} = ۴b^۲ + \cancel{۴c^۲} - ۴ax \rightarrow \cancel{۴}\,ax = \cancel{۴}\,b^۲ \rightarrow x = \frac{b^۲}{a} \;,\; MN = ۲MF = ۲x = \frac{۲b^۲}{a}$$

سخت

۱۵

دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۳$ مماس داخل هستند بنابراین طول خط‌المرکز آن‌ها برابر است با:



$$O_۱O_۳ = R_۱ - R_۳$$

دو دایرهٔ $C_۲$ و $C_۳$ مماس خارج هستند بنابراین طول خط‌المرکزین آن‌ها برابر است با:

$$O_۲O_۳ = R + R_۳$$

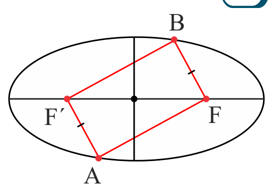
$$O_۱O_۳ + O_۲O_۳ = (R_۱ - R_۳) + (R_۲ + R_۳) = R_۱ + R_۲$$

بنابراین مکان هندسی مرکز دایره $C_۳$ یک بیضی با طول قطر بزرگ $R_۱ + R_۲$ با کانون‌های $O_۱$ و $O_۲$ می‌باشد.

سخت

۱۶

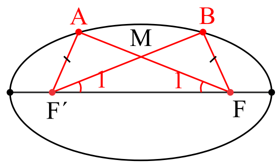
الف)



$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} B \rightarrow BF + BF' = ۲a \text{ روی بیضی است} \\ A \rightarrow AF + AF' = ۲a \text{ روی بیضی است} \end{array}\right\} \rightarrow BF + BF' = AF + AF' \\ AF' = BF \end{array}\right\} \rightarrow AF = BF' \quad A'F = BF$$

چهارضلعی $AFBF'$ متوازی‌الاضلاع است پس AF و BF' موازی‌اند.

ب)



$$\left.\begin{array}{r} A \rightarrow AF + AF' = ۲a \text{ روی بیضی است} \\ B \rightarrow BF + BF' = ۲a \text{ روی بیضی است} \\ AF' = BF \end{array}\right\} \rightarrow AF = BF'$$

$$\left.\begin{array}{l} AF = BF' \\ AF' = BF \\ FF' = FF' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{AFF'} \cong \overset{\triangle}{BFF'} \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{F}_۱ = \hat{F'}_۱$$

M از F و F' به یک فاصله است.

بنابراین روی عمودمنصف آن $\rightarrow MF = MF' \rightarrow$ متساوی‌الساقین است $FMF' \rightarrow$ (قطر کوچک بیضی) قرار دارد.

سخت

۱۷

$$\left.\begin{array}{r} \hat{B} = \hat{C} = ۴۵^\circ \rightarrow BF = Fc \\ BF = a \end{array}\right\} \rightarrow BF = FC = a$$

$$\left.\begin{array}{r} \overset{\triangle}{BFC} : a^۲ + a^۲ = BC^۲ \rightarrow BC = a\sqrt{۲} \\ OC = Bc \end{array}\right\} \rightarrow BC = OD = a\sqrt{۲}$$

$$AD = OD - OA = a\sqrt{۲} - a = a(\sqrt{۲} - ۱)$$

$$C\hat{F}D = F\hat{C}D = ۴۵^\circ \rightarrow DF = DC$$

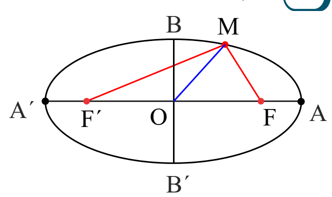
$$\overset{\triangle}{FDC}: DF^2+DC^2=a^2 \to DF^2=\frac{a^2}{2} \to DF=\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$AF=FD-AD=\frac{\sqrt{2}}{2}a-(a\sqrt{2}-a)=a(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}+1)=a(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\frac{AD}{AF}=\frac{a(\sqrt{2}-1)}{a(1-\frac{\sqrt{2}}{2})}=\frac{\sqrt{2}-1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$$

سخت

۱۸ الف)



$$2a=10\to a=5 \qquad 2b=6\to b=3$$

$$a^2=b^2+c^2\to 5^2=3^2+c^2\to c=4$$

$$\to \left.\begin{array}{l} OF=OF'=C=4 \\ OM=4 \ \text{فرض} \end{array}\right\}\to OF=OF'=OM$$

ب) میانهٔ OM نصف FF' است. می‌دانیم اگر در مثلثی میانه اندازه میانه وارد بر یک ضلع نصف اندازهٔ آن ضلع باشد آن مثلث قائم‌الزاویه است بنابراین $F\hat{M}F'=90^\circ$ می‌باشد.

$$MF+MF'=2a\to MF+MF'=10$$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow[\text{می‌رسانیم.}]{\text{طرفین را به توان ۲}} MF^2+MF'^2+2MF\times MF'=100 \\ \overset{\triangle}{FMF'}: MF^2+MF'^2=FF'^2\to MF^2+MF'^2=64 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \to 64+2MF\times MF'=100\to 2MF\times MF'=36\to MF\times MF'=18 \\ MF+MF'=10\to MF=10-MF' \end{array}\right\}$$

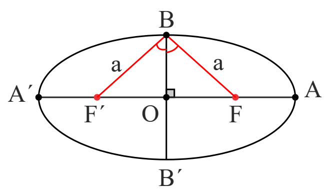
$$\to MF'\times(10-MF')=18\to MF'^2-10MF'+18=0$$

$$\to MF'=\frac{5\pm\sqrt{25-18}}{1}=5\pm\sqrt{7}\to MF'=5+\sqrt{7}\ ,\ MF=5-\sqrt{7}$$

سخت

۱۹ راه‌حل اول:

طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. بنابراین:



$$AA'=2BB'\to \cancel{2}a=2\times\cancel{2}b\to a=2b\to b=\frac{a}{2} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} BF+BF'=2a \\ BF=BF' \end{array}\right\}\to BF=BF'=a$$

$$\overset{\triangle}{BOF}: BO^2+OF^2=BF^2\to b^2+c^2=a^2\xrightarrow{(1)}(\frac{a}{2})^2+c^2=a^2$$

$$\to c^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{4a^2-a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}\to c=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\to \overset{\triangle}{BOF}: \sin(O\hat{B}F)=\frac{OF}{BF}=\frac{c}{a}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\to O\hat{B}F=60^\circ$$

$$F\hat{B}F'=O\hat{B}F+O\hat{B}F'=60^\circ+60^\circ=120^\circ$$

راه‌حل دوم:

در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{oBF}$:

$$b=\frac{a}{2}\Rightarrow OB=\frac{BF}{2}\Rightarrow \sin(O\hat{B}F)=\frac{OB}{BF}=\frac{1}{2}\Rightarrow \overset{\triangle}{OBF}=30\Rightarrow o\hat{F'}B=30^\circ$$

پس در مثلث $\overset{\triangle}{BFF'}$ زاویهٔ B برابر 120° درجه است.

سخت

۲۰ خط بر سهمی مماس است بنابراین باید معادلهٔ حاصل از حل دستگاه آن‌ها دارای ریشهٔ مضاعف باشد.

$$y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}\xrightarrow{\times -۲}-۲y=x-۳\rightarrow x=-۲y+۳\quad (۱)$$

$$y^{۲}-۲y+x+۱=۰\xrightarrow{(۱)}y^{۲}-۲y+۳+۱=۰\rightarrow y^{۲}-۴y+۴=۰\rightarrow (y-۲)^{۲}=۰\rightarrow y=۲$$

$y=۲$ ریشهٔ مضاعف است و خط بر سهمی مماس است.

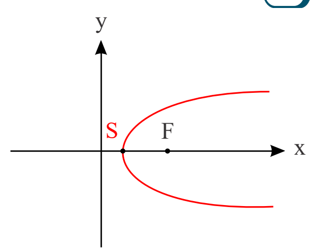
$$x=-۲y+۳\xrightarrow{y=۲}-۲\times ۲+۳=-۱\rightarrow \text{مختصات نقطه تماس } (-۱,۲)$$

سخت

(۲۱)

$y^{۲}=۴(x-۱)\rightarrow$ **سهمی افقی و دهانهٔ آن رو به راست است**

$$\left.\begin{array}{l}\text{مختصات رأس } S(۱,۰)\\ ۴a=۴\rightarrow a=۱\end{array}\right\}\rightarrow F(۱+۱,۰)=(۲,۰)$$



کانون سهمی مرکز دایره به شعاع ۳ واحد است. بنابراین داریم:

معادلهٔ دایره : $(x-۲)^{۲}+(y-۰)^{۲}=۳^{۲}\rightarrow (x-۲)^{۲}+y^{۲}=۹$

برای به دست آوردن مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی دستگاه معادلات آن‌ها را حل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}y^{۲}=۹-(x-۲)^{۲}\\ y^{۲}=۴x-۴\end{array}\right\}\rightarrow ۹-(x-۲)^{۲}=۴x-۴\rightarrow ۹-x^{۲}\cancel{-۴}\cancel{+۴x}=\cancel{۴x}\cancel{-۴}$$

$$\rightarrow x^{۲}=۹\left\{\begin{array}{l}x=+۳\rightarrow y^{۲}=۴\times ۳-۴=۸\rightarrow y=\pm ۲\sqrt{۲}\\ x=-۳\rightarrow y^{۲}=۴(-۳)-۴=-۱۶\ \text{غیر قابل قبول}\end{array}\right.$$

بنابراین مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی به صورت زیر است:

$$A(۳,۲\sqrt{۲})\ ,\ \ B(۳,-۲\sqrt{۲})$$

سخت

(۲۲)

$$|a|=۲\ ,\ |b|=\sqrt{۲}\ ,\ |a'|=?$$

$$|۲a+b|^{۲}=۱۲a\cdot b\Rightarrow ۴|a|^{۲}+|b|^{۲}+۴a\cdot b=۱۲a\cdot b\Rightarrow ۱۶+۲=۸a\cdot b$$

$$\Rightarrow a\cdot b=\frac{۹}{۴}\Rightarrow |a|\,\underset{\sqrt{۲}}{\underline{|b|}}\,\cos\theta=\frac{۹}{۴}\Rightarrow \underbrace{|a|\cos\theta}_{|a'|}=\frac{۹}{۴\sqrt{۲}}=\frac{۹\sqrt{۲}}{۸}$$

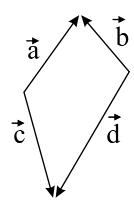
سخت

(۲۳)

$$|a|=۲,\ |b|=۱\ ,\ |c|=۳,\ |d|=۴\quad ,\quad b\cdot d+c\cdot d-b\cdot c=?$$

$$\text{مطابق شکل}\Rightarrow a-b+d-c=\overline{۰}$$

$$\Rightarrow a=b+c-d\xrightarrow{\text{اندازه}}|a|=|b+c-d|$$



$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}|a|^{۲}=|b|^{۲}+|c|^{۲}+|d|^{۲}+۲b\cdot c-۲b\cdot d-۲c\cdot d$$

$$\Rightarrow ۴=۱+۹+۱۶+۲(b\cdot c-b\cdot d-c\cdot d)\Rightarrow b\cdot c-b\cdot d-c\cdot d=-۱۱$$

$$\xrightarrow{(-)\times}b\cdot d+c\cdot d-b\cdot c=۱۱$$

سخت

(۲۴)

$$A(۱,۲,-۱)\ ,\ B(۳,۰,۱)\ ,\ M=(x,y,z)\ ,\ N(۲,۱,۰)\quad ,\quad |MN|=?$$

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=۱۳\Rightarrow (M-A)\cdot(M-B)=۱۳$$

$$\Rightarrow (x-۱,y-۲,z+۱)\cdot(x-۳,y,z-۱)=۱۳$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۴x + ۳ + y^۲ - ۲y + z^۲ - ۱ = ۱۳ \Rightarrow x^۲ - ۴x + y^۲ - ۲y + z^۲ = ۱۱ \quad (۱)$$

$$|MN| = \sqrt{(x-۲)^۲ + (y-۱)^۲ + z^۲} = \sqrt{\underbrace{x^۲ - ۴x + y^۲ - ۲y + z^۲}_{۱۱} + ۵} \overset{\text{طبق (۱)}}{=\!=} ۴$$

سخت

۲۵

$$\begin{cases} \min(\underline{\underline{۱۶x^۲}} + \underline{\underline{۲۵y^۲}} + \underline{\underline{۲z^۲}}) = ? \\ \text{جذر تک تک}: u = (۴x, ۵y, \sqrt{۲}z) \Rightarrow v = (۲, ۳, \dfrac{۱}{\sqrt{۲}}) \\ \underbrace{۸x + ۱۵y + z}_{u\cdot v} = ۳ \end{cases}$$

نامساوی کوشی – شوارتز: $|u \cdot v| \le |u|\,|v| \Rightarrow ۳ \le \sqrt{۱۶x^۲ + ۲۵y^۲ + ۲z^۲} \times \underbrace{\sqrt{۴ + ۹ + \dfrac{۱}{۲}}}_{\frac{۳\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} \le \sqrt{۱۶x^۲ + ۲۵y^۲ + ۲z^۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{۲}{۳} \le ۱۶x^۲ + ۲۵y^۲ + ۲z^۲$$

$$\Rightarrow \min(۱۶x^۲ + ۲۵y^۲ + ۲z^۲) = \frac{۲}{۳}$$

سخت

۲۶ اگر α و α' به ترتیب زاویهٔ بردار u و v با محور xها باشند، داریم:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{۳\pi}{۴}, |u| = \sqrt{۲} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{a}{|u|} \Rightarrow -\dfrac{\sqrt{۲}}{۲} = \dfrac{a}{\sqrt{۲}} \Rightarrow a = -۱ \\ \alpha' = \dfrac{\pi}{۳}, |v| = ۲ \Rightarrow \cos\alpha' = \dfrac{a'}{|v|} \Rightarrow \dfrac{۱}{۲} = \dfrac{a'}{۲} \Rightarrow a' = ۱ \\ u = (a,b,c),\ \ v = (a', b', c'),\ \ u + v = (\underbrace{a + a'}_{?}, b + b', c + c') \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + a' = -۱ + ۱ = ۰$$

سخت

۲۷ اگر بردارهای a، b و c قطرهای وجوه مجاور یک متوازی‌السطوح باشند که همگی از یک نقطه می‌گذرند، حجم آن برابر است تا نصف متوازی‌السطوح یعنی:

$$\begin{cases} V = \dfrac{1}{2}\left|a\cdot(b\times c)\right| = \dfrac{21}{2} \\ \left|a\cdot(b\times c)\right| = \left|\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{matrix}\right| = \left|(1-6+0)-(0+12+4)\right| = 21 \end{cases}$$

سخت

۲۸

$|a| = ۳ \quad , \quad |b| = ۴ \quad , \quad |a'| = ۲$

مساحت مثلث ساخته شده روی دو بردار $(۲a + ۳b)$ و $(b - ۲a)$ برابر است با نصف اندازهٔ حاصل‌ضرب خارجی آن دو یعنی:

$$S = \frac{۱}{۲}\left|(۲a + ۳b) \times (b - ۲a)\right| = \frac{۱}{۲}\left|۲a \times b - ۴\underbrace{a \times a}_{۰} + ۳\underbrace{b \times b}_{۰} \underbrace{- ۶b \times a}_{+۶a\times b}\right| = \frac{۱}{۲}|۸a \times b|$$

$$\Rightarrow S = ۴\,|a \times b| = ?$$

$$\begin{cases} \text{طبق فرض}: |a'| = ۲ \Rightarrow \dfrac{|a \cdot b|}{|b|} = ۲ \xrightarrow{|b| = ۴} |a \cdot b| = ۸ \\ \text{می‌دانیم}: |a \times b|^۲ + |a \cdot b|^۲ = |a|^۲|b|^۲ \Rightarrow |a \times b|^۲ + ۶۴ = ۹ \times ۱۶ \Rightarrow |a \times b|^۲ = ۸۰ \end{cases}$$

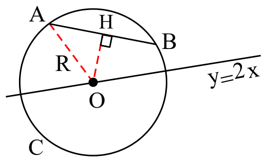
$$\Rightarrow |a \times b| = \sqrt{۸۰} = ۴\sqrt{۵} \Rightarrow S = ۴\,|a \times b| = ۴ \times ۴\sqrt{۵} = ۱۶\sqrt{۵}$$

اثبات رابطهٔ $|a \times b|^۲ + |a \cdot b|^۲ = |a|^۲|b|^۲$:

$$|a \times b|^۲ + |a \cdot b|^۲ = |a|^۲|b|^۲\sin^۲\theta + |a|^۲|b|^۲\cos^۲\theta = |a|^۲|b|^۲\underbrace{(\sin^۲\theta + \cos^۲\theta)}_{۱} = |a|^۲|b|^۲$$

سخت

۲۹ از آنجا که مرکز دایره روی خط $y = ۲x$ قرار دارد، پس مختصات آن بصورت $O(\alpha, ۲\alpha)$ می‌باشد. مطابق شکل داریم:



$(x - \alpha)^۲ + (y - ۲\alpha)^۲ = R^۲$: معادلهٔ دایره

$$\begin{cases} A(۱ ,\, -۲) \in C \Rightarrow (۱ - \alpha)^۲ + (-۲ - ۲\alpha)^۲ = R^۲ \\ B(۳ ,\, ۰) \in C \Rightarrow (۳ - \alpha)^۲ + (۰ - ۲\alpha)^۲ = R^۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^۲ - ۲\alpha + ۱ + ۴ + ۴\alpha^۲ + ۸\alpha = R^۲ \\ ۹ + \alpha^۲ - ۶\alpha + ۴\alpha^۲ = R^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵\alpha^۲ + ۶\alpha + ۵ = R^۲ \\ ۵\alpha^۲ - ۶\alpha + ۹ = R^۲ \end{cases} \quad (۱)$$

$$\Rightarrow ۵\alpha^۲ + ۶\alpha + ۵ = ۵\alpha^۲ - ۶\alpha + ۹ \Rightarrow ۱۲\alpha = ۹ - ۵ = ۴ \Rightarrow \alpha = \frac{۱}{۳}$$

$$\xrightarrow{(۱)} R^۲ = ۵ \times \frac{۱}{۹} - ۲ + ۹ = ۹ - \frac{۱۳}{۹} = \frac{۶۸}{۹} \text{ و } O(\alpha ,\, ۲\alpha) = (\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$$

$(x - \frac{۱}{۳})^۲ + (y - \frac{۲}{۳})^۲ = \frac{۶۸}{۹}$: معادلهٔ دایره

سخت

۳۰ مرکز دایره روی $y = x$ قرار دارد پس به صورت $O(\alpha, \alpha)$ می‌باشد. داریم:

دایره$C : (x - \alpha)^۲ + (y - \alpha)^۲ = ۹$

$$A \in C \Rightarrow (-\sqrt{۲} - \alpha)^۲ + (\sqrt{۲} - \alpha)^۲ = ۹$$

$$۲ + \alpha^۲ + ۲\sqrt{۲}\alpha + ۲ + \alpha^۲ - ۲\sqrt{۲}\alpha = ۹$$

$$۲\alpha^۲ + ۴ = ۹ \Rightarrow ۲\alpha^۲ = ۵ \Rightarrow \alpha^۲ = \frac{۵}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{\pm\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow O(\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}, \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}) \text{ و } O(\frac{-\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}, \frac{-\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}})$$

معادلهٔ دایره :
$$\begin{cases} (x + \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}})^۲ + (y + \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}})^۲ = ۹ \\ (x - \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}})^۲ + (y - \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}})^۲ = ۹ \end{cases}$$

سخت