نام و نام خانوادگی:

تعداد سوال: ۳۰

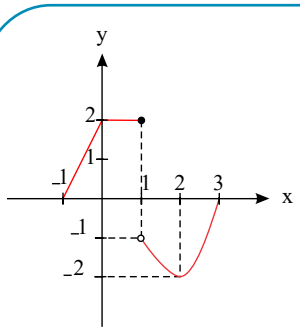
نام آزمون: حسابان دوازدهم تکمیلی تشریحی

زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه

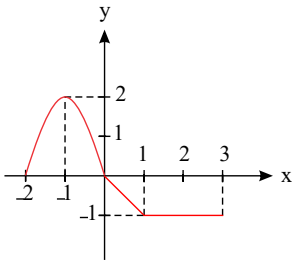
افشار

مرکز مشاوره تحصیلی دکتر
علیرضا افشار

۱) نمودار تابع $y = f(x-۱)$ به‌صورت مقابل است، نمودار تابع $y = f(\frac{۱}{۲}x) - ۱$ را رسم کنید.



۲) نمودار تابع $y = f(-۲x)$ به‌صورت مقابل است، نمودار تابع $y = -۲f(x-۲)$ را رسم کنید.



۳) جواب‌های کلی معادله زیر را بیابید.

$$\tan ۴x = \cot(\frac{\pi}{۳} + ۴x)$$

۴) معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\sin^۲(x - \frac{\pi}{۸}) + ۲\cos(\frac{۵\pi}{۸} - x) = ۳$$

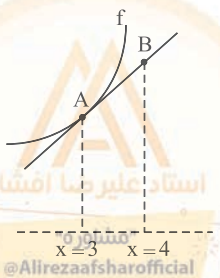
۵) اگر $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{۲x^n + mx^۳ + x^۲ - ۱}{۴x^۳ + x^۲ - ۳} = -۲$، آن‌گاه m و n را بیابید. $(n \in \mathbb{N})$

۶) حاصل حدهای زیر را بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} [\frac{۳x+۱}{x+۲}]$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} [\frac{x+۲}{x-۱}]$

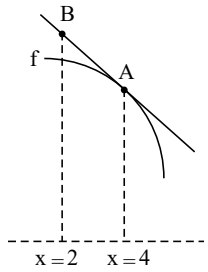
۷) حاصل $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [\frac{-۲x+۱}{x-۲}]$ را بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۸) در نمودار شکل مقابل اگر $f(۳) = ۷$، $f'(۳) = ۶$ باشد، مختصات نقطهٔ B را بیابید.

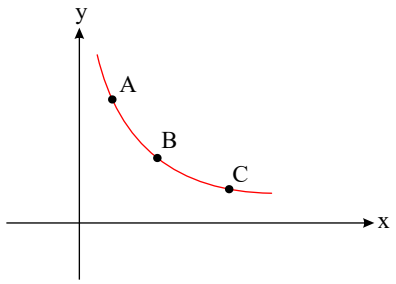


استاد علیرضا افشار
@Alirezaafsharofficial

۹) در شکل مقابل اگر $f(۴) = ۵$ و $f'(۴) = -۳$ باشد، مختصات نقطهٔ B را بیابید.



۱۰) نمودار تابع f بصورت مقابل است. مقادیر مشتق تابع f در نقاط C, B, A را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.



۱۱) مشتق تابع $f(x) = \sin x$ در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۶}$ را با استفاده از تعریف بیابید.

۱۲) مشتق تابع $f(x) = \cos x$ در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۶}$ را با استفاده از تعریف مشتق بیابید.

۱۳) مشتق توابع زیر را بیابید (ساده کردن الزامی نیست)

الف) $f(x) = \dfrac{x^۲ - ۳x}{x^۳ + x + ۱}$

ب) $g(x) = (x^۳ - ۴x)^۳ (x^۲ + ۷x)$

۱۴) مشتق دوم $f(x) = \dfrac{x - ۱}{x + ۲}$ را بیابید.

۱۵) مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt{۱ - \sqrt{۱ - x^۲}}$ را در $x = ۰$ بررسی کنید.

۱۶) مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt{|x + ۲|}$ در نقطهٔ $x = -۲$ را بررسی کنید.

۱۷) مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sin x\,|\cos x|$ در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{۲}$ را بررسی کنید.

۱۸) اگر $\lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{x + ۳}{x^۲ + ax + b} = +\infty$ آنگاه مقادیر a و b را بیابید.

۱۹) حاصل حد مقابل را بیابید.

$$\lim_{x \to \frac{۵\pi}{۴}} \frac{x - ۱}{\sqrt{۲}\sin x + ۱}$$

۲۰) حاصل $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{۱ + \cos x}$ را بیابید.

۲۱) مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \dfrac{(x + ۱)\sqrt{x}}{x^۳ - x}$ را بیابید.

۲۲) در تابع $f(x) = \dfrac{x - ۲}{x^۲ + mx + ۶}$ ، m را چنان بیابید که تابع فقط یک مجانب قائم داشته باشد.

۲۳) در تابع $f(x) = \dfrac{x^۲ + ۴x + ۳}{x^۲ + mx + ۹}$ ، m را چنان بیابید که تابع فقط یک مجانب قائم داشته باشد.

۲۴) تابع $f(x) = \dfrac{\tan x}{۲\sin x - ۱}$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ چند مجانب قائم دارد؟

۲۵) مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \dfrac{۱}{۲ + x^۲}$ را در بازهٔ $[-۲, ۳]$ بیابید.

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

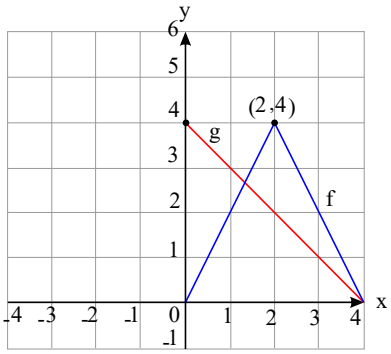
۲۶) نقاط عطف تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}}{x^{۲}+۱۲}$ را در صورت وجود بیابید.

۲۷) نقاط عطف تابع $f(x)=\dfrac{x^{۳}}{x^{۲}+۱}$ را بیابید.

۲۸) در تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^{۲}+۱}$ مقادیر a، b را چنان بیابید که نقطهٔ $A(۱,۳)$ نقطهٔ عطف تابع باشد.

۲۹) تابع $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+c$ مفروض است. c,b,a را چنان تعیین کنید که نقطهٔ $A(۱,-۱)$ مرکز تقارن تابع بوده و خط مماس بر منحنی در نقطهٔ عطف عمود بر خط $x+۳y=۷$ باشد.

۳۰) نمودار توابع f و g را در شکل مقابل در نظر بگیرید.



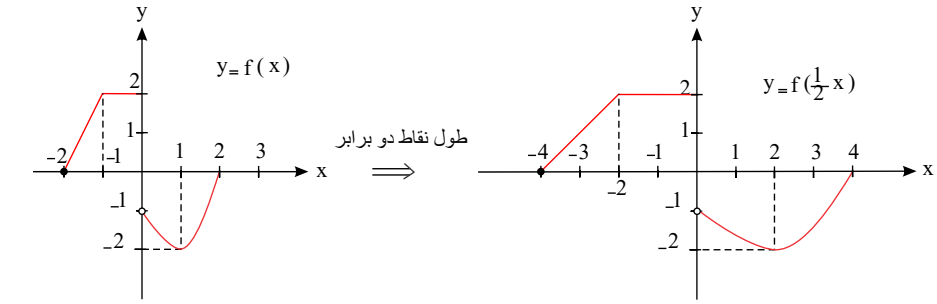
الف) اگر $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ مطلوب است $h'(۱)$، $h'(۲)$ و $h'(۳)$

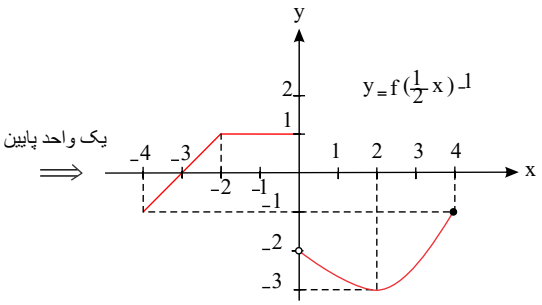
ب) اگر $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(۱)$، $k'(۲)$ و $k'(۳)$

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

پاسخنامه تشریحی

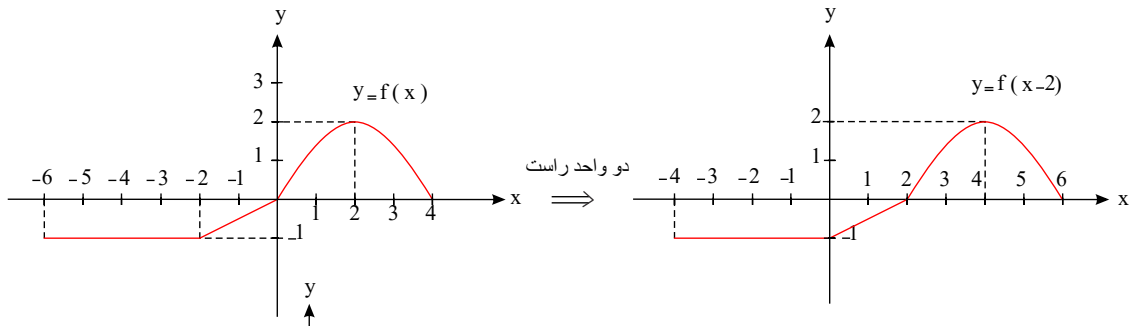
۱) با توجه به این که برای رسم $y=f(x-۱)$ باید $y=f(x)$ را یک واحد به راست منتقل کنیم، پس برای رسم $y=f(x)$ از روی $y=f(x-۱)$ باید نمودار $y=f(x-۱)$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم پس داریم:

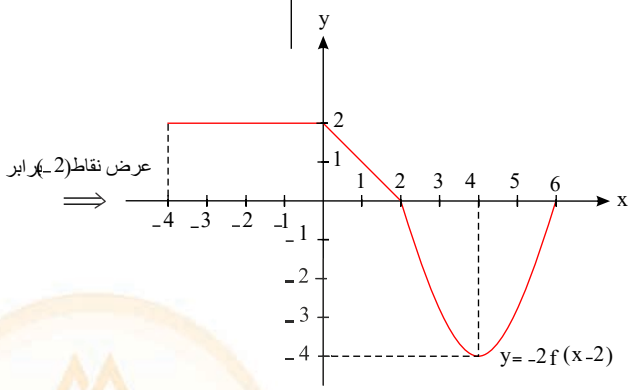




سخت

۲) با توجه به این که برای رسم $y=f(-۲x)$ باید در نمودار $y=f(x)$ طول نقاط را بر -۲ تقسیم کنیم، حال برای رسم $y=f(x)$ از روی $y=f(-۲x)$ باید در نمودار $y=f(-۲x)$ طول نقاط را در -۲ ضرب کنیم.





سخت

۳) نکته: $\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha, \tan u=\tan v \to u=k\pi+v$

$$tan۴x=cot(\frac{\pi}{۳}+۴x) \Rightarrow \tan ۴x=\tan(\frac{\pi}{۲}-(\frac{\pi}{۳}+۴x))$$

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

$$\Rightarrow \tan 4x = \tan(\frac{\pi}{6} - 4x) \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{6} - 4x$$

$$\Rightarrow 8x = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{48}$$

متوسط

۴ میدانیم: $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$

$$\sin^2(x - \frac{\pi}{8}) + 2\cos(\frac{5\pi}{8} - x) = 3 \Rightarrow \sin^2(x - \frac{\pi}{8}) + 2\sin(\frac{\pi}{2} - (\frac{5\pi}{8} - x)) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2(x - \frac{\pi}{8}) + 2\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{8} + x) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2(x - \frac{\pi}{8}) + 2\sin(x - \frac{\pi}{8}) - 3 = 0 \ , \ \sin(x - \frac{\pi}{8}) = t$$

$$\Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1 \ , \ t = -3$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{8}) = -3 \text{ غ ق ق} \ , \ \sin(x - \frac{\pi}{8}) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{8}$$

سخت

۵

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^n + mx^3 + x^2 - 1}{4x^3 + x^2 - 3} = -2$$

حالت ۱) $n < 3 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{mx^3}{4x^3} = \frac{m}{4} = -2 \Rightarrow m = -8 \Rightarrow n < 3 \ , \ m = -8$ جواب

حالت ۲) $n = 3 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3 + mx^3}{4x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2+m)x^3}{4x^3} = \frac{2+m}{4} = -2$

$\Rightarrow 2 + m = -8 \Rightarrow m = -10 \Rightarrow n = 3 \ , \ m = -10$ جواب

حالت ۳) $n > 3 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^n}{4x^3} = \pm\infty \rightarrow$ غیر قابل قبول

سخت

۶

الف) می‌دانیم $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{x+2} = 3$ ، حال باید ببینیم کسر $\frac{3x+1}{x+2}$ چگونه به ۳ میل می‌کند، برای این کار ۳ برابر مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty} [\frac{3x+1}{x+2}] = \lim_{x\to+\infty} [\frac{3x+6-5}{x+2}] = \lim_{x\to+\infty} [\frac{3(x+2)}{x+2} - \frac{5}{x+2}] = \lim_{x\to+\infty} [3 - \frac{5}{x+2}]$$

$$= [3 - \frac{5}{+\infty}] = [3 - 0^+] = [3 - \varepsilon] = 2$$

ب) می‌دانیم $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$ ، حال باید ببینیم کسر $\frac{x+2}{x-1}$ چگونه به یک میل می‌کند، برای این کار مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-\infty} [\frac{x+2}{x-1}] = \lim_{x\to-\infty} [\frac{x-1+3}{x-1}] = \lim_{x\to-\infty} [\frac{x-1}{x-1} + \frac{3}{x-1}] = \lim_{x\to-\infty} [1 + \frac{3}{x-1}]$$

$$= [1 + \frac{3}{-\infty}] = [1 + 0^-] = [1 - \varepsilon] = 0$$

سخت

۷ می‌دانیم $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x+1}{x-2} = -2$ ، حال باید ببینیم $\frac{-2x+1}{x-2}$ چگونه به -2 میل می‌کند. برای این کار -2 برابر مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty} [\frac{-2x+1}{x-2}] = \lim_{x\to\pm\infty} [\frac{-2x+4-3}{x-2}] = \lim_{x\to\pm\infty} [\frac{-2(x-2)}{x-2} + \frac{-3}{x-2}]$$

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
www.alirezaafsharoffical

$$= \lim_{x\to\pm\infty}[-۲+\frac{-۳}{x-۲}]$$

$$= \begin{cases} \lim_{x\to+\infty}[-۲+\frac{-۳}{x-۲}] = [-۲+\frac{-۳}{+\infty}] = [-۲+۰^-] = [-۲-\varepsilon] = -۳ \\ \lim_{x\to-\infty}[-۲+\frac{-۳}{x-۲}] = [-۲+\frac{-۳}{-\infty}] = [-۲+۰^+] = [-۲+\varepsilon] = -۲ \end{cases}$$

سخت

۸ باید ابتدا معادلهٔ خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ A را بیابیم.

$f(۳)=۷ \Rightarrow A(۳,۷), f'(۳)=۶ \Rightarrow$ شیب خط مماس بر f در نقطه A $=۶$

$y-۷=۶(x-۳) \Rightarrow y=۶x-۱۸+۷ \Rightarrow y=۶x-۱۱$

$x=۴ \Rightarrow y=۶\times۴-۱۱=۲۴-۱۱=۱۳ \Rightarrow B=(۴,۱۳)$

سخت

۹ باید ابتدا معادلهٔ خط مماس بر f در نقطهٔ A را بیابیم.

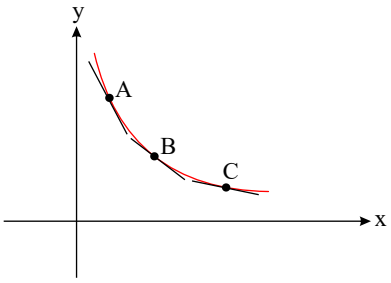
$f(۴)=۵ \Rightarrow A=(۴,۵)\ ,\ f'(۴)=-۳ \Rightarrow$ شیب خط مماس بر f در A $=-۳$

$y-۵=-۳(x-۴) \Rightarrow y=-۳x+۱۲+۵ \Rightarrow y=-۳x+۱۷$

$x=۲ \Rightarrow y=-۳\times۲+۱۷=۱۱ \Rightarrow B(۲,۱۱)$

سخت

۱۰ با رسم خطوط مماس بر منحنی f در نقاط C, B, A داریم:



$\rightarrow$ شیب خط مماس در C $>$ شیب خط مماس در B $>$ شیب خط مماس در A

$f'(A)<f'(B)<f'(C)$

متوسط

۱۱

$f(x)=\sin x,\ f(\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۲}$

$$f'(\frac{\pi}{۶})=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{۶})}{x-\frac{\pi}{۶}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{۶}}{x-\frac{\pi}{۶}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{\sin x-\frac{۱}{۲}}{x-\frac{\pi}{۶}}$$

با استفاده از تغییر متغیر مقابل داریم:

$x-\frac{\pi}{۶}=t \Rightarrow x=\frac{\pi}{۶}+t, t\to ۰$

$$f'(\frac{\pi}{۶})=\lim_{t\to۰}\frac{\sin(\frac{\pi}{۶}+t)-\frac{۱}{۲}}{t}=\lim_{t\to۰}\frac{\sin\frac{\pi}{۶}\cos t+\cos\frac{\pi}{۶}\sin t-\frac{۱}{۲}}{t}$$

$$=\lim_{t\to۰}\frac{\frac{۱}{۲}\cos t-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin t}{t}=\lim_{t\to۰}\frac{-\frac{۱}{۲}(۱-cost)+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin t}{t}$$

$$=\lim_{t\to۰}\frac{\frac{۱}{۲}\times۲\sin^۲(\frac{t}{۲})+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin t}{t}=\lim_{t\to۰}\frac{-(\frac{\sin\frac{t}{۲}}{\frac{t}{۲}}\times\frac{t}{۲})^۲}{t}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\lim_{t\to۰}\frac{\sin t}{t}$$

$$=\lim_{t\to۰}\frac{-\frac{۱}{۴}t^۲}{t}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۱=\lim_{t\to۰}(-\frac{۱}{۴}t)+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۰+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

سخت

۱۲

$f(x)=\cos x$

$$f'(\frac{\pi}{۶})=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{۶})}{x-\frac{\pi}{۶}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{\cos x-\cos\frac{\pi}{۶}}{x-\frac{\pi}{۶}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{\cos x-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{x-\frac{\pi}{۶}}$$

استاد علیرضا افشار
@Alirezaafsharofficial

با استفاده از تغییر متغیر مقابل داریم:

$$x-\frac{\pi}{6}=t\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+t, t\to 0$$

$$f'(\frac{\pi}{6})=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{6}+t)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{6}\cos t-\sin\frac{\pi}{6}\sin t-\frac{\sqrt{3}}{2}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t-\frac{\sqrt{3}}{2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos t)-\frac{1}{2}\sin t}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sin^2(\frac{t}{2})}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\sin t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sqrt{3}(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\times\frac{t}{2})^2}{t}-\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sqrt{3}\times\frac{1}{4}t^2}{t}-\frac{1}{2}\times 1=\lim_{t\to 0}(-\frac{\sqrt{3}}{4}t)-\frac{1}{2}=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

سخت

۱۳

الف) $f(x)=\frac{x^2-3x}{x^3+x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-3)(x^3+x+1)-(3x^2+1)(x^2-3x)}{(x^3+x+1)^2}$

ب) $g'(x)=3(3x^2-4)(x^3-4x)^2(x^2+7x)+(2x+7)(x^3-4x)^3$

سخت

۱۴

$$f(x)=\frac{x-1}{x+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{x+2-(x-1)}{(x+2)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{0-2(x+2)\times 3}{(x+2)^4}=\frac{-6}{(x+2)^3}$$

متوسط

۱۵

$$f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}, f(0)=0$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}\times\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-1+x^2}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

تابع در $x=0$ مشتق‌ناپذیر است.

سخت

۱۶

$$f(x)=\sqrt{|x+2|}; f(-2)=0$$

$$f'(-2)=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{|x+2|}-0}{x+2}\times\frac{\sqrt{|x+2|}}{\sqrt{|x+2|}}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{|x+2|}{(x+2)\sqrt{|x+2|}}$$

$$f'_-(-2)=\lim_{x\to (-2)^-}\frac{-(x+2)}{(x+2)\sqrt{|x+2|}}=\lim_{x\to (-2)^-}\frac{-1}{\sqrt{|x+2|}}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$f'_+(-۲) = \lim_{x\to(-۲)^+} \frac{x+۲}{(x+۲)\sqrt{|x+۲|}} = \lim_{x\to(-۲)^+} \frac{۱}{\sqrt{|x+۲|}} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

تابع در $x = -۲$ مشتق‌ناپذیر است.

سخت

۱۷

$$f(x) = \sin x\,|\cos x| \ ,\ f(\frac{\pi}{۲}) = ۰$$

$$f'(\frac{\pi}{۲}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{f(x)-f(\frac{\pi}{۲})}{x-\frac{\pi}{۲}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin x\,|\cos x| - ۰}{x-\frac{\pi}{۲}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin x\,|\cos x|}{x-\frac{\pi}{۲}}$$

$$x-\frac{\pi}{۲} = t \Rightarrow x = \frac{\pi}{۲}+t \ ,\ t\to ۰$$

$$f'(\frac{\pi}{۲}) = \lim_{t\to ۰} \frac{\sin(\frac{\pi}{۲}+t)\left|\cos(\frac{\pi}{۲}+t)\right|}{t} = \lim_{t\to ۰} \frac{\cos t\,|\sin t|}{t}$$

$$f'_-(\frac{\pi}{۲}) = \lim_{t\to ۰^-} \frac{\cos t|\sin t|}{t} = \lim_{t\to ۰^-} \frac{\cos t(-\sin t)}{t} = \lim_{t\to ۰^-} -\cos t \times \frac{\sin t}{t}$$

$$= \lim_{t\to ۰^-} -\cos t \times ۱ = -۱$$

$$f'_+(\frac{\pi}{۲}) = \lim_{t\to ۰^+} \frac{\cos t|\sin t|}{t} = \lim_{t\to ۰^+} \cos t \times \frac{\sin t}{t} = \lim_{t\to ۰^+} \cos t \times ۱ = ۱$$

تابع در $x = \frac{\pi}{۲}$ مشتق‌ناپذیر است.

سخت

۱۸ حد صورت عددی مثبت است و چون در هر دو حالت $x\to ۲^-$ و $x\to ۲^+$ حاصل حد $+\infty$ است، پس $x = ۲$ باید ریشه مضاعف مخرج باشد.

$$x^۲+ax+b = ۰ \Rightarrow \quad \text{ریشهٔ مضاعف}\ x = ۲ \Rightarrow -\frac{a}{۲\times ۱} = ۲ \Rightarrow a = -۴$$

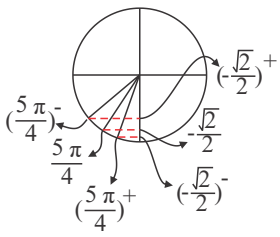
$$\Delta = ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴b = ۰ \Rightarrow ۱۶ - ۴b = ۰ \Rightarrow b = ۴$$

روش دوم: چون در عبارت $x^۲+ax+b$ ضریب $x^۲$ برابر یک است و $x = ۲$ ریشه مضاعف این عبارت است، پس $x^۲+ax+b$ همان $(x-۲)^۲$ است. یعنی:

$$x^۲+ax+b = (x-۲)^۲ = x^۲-۴x+۴ \Rightarrow a = -۴, b = ۴$$

متوسط

۱۹



$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to(\frac{۵\pi}{۴})^-} \frac{x-۱}{\sqrt{۲}\sin x+۱} = \frac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\varepsilon)+۱} = \frac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{-۱+\sqrt{۲}\varepsilon+۱}$$

$$= \frac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{+\sqrt{۲}\varepsilon} = \frac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{۰^+} = +\infty$$

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to(\frac{۵\pi}{۴})^+} \frac{x-۱}{\sqrt{۲}\sin x+۱} = \frac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\varepsilon)+۱} = \frac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{-۱-\sqrt{۲}\varepsilon+۱}$$

$$= \frac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{-\sqrt{۲}\varepsilon} = \frac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{۰^-} = -\infty$$

توجه کنید که $\frac{۵\pi}{۴}-۱$ عددی مثبت است.

سخت

۲۰ با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$x\to\pi$$

$$x-\pi = t \Rightarrow \begin{cases} x = \pi+t \\ t\to ۰ \end{cases}$$

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@AlirezaAfshar_official

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi+t)}{1+\cos(\pi+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{1-\cos t}\times\frac{1+\cos t}{1+\cos t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t(1+\cos t)}{1-\cos^2 t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t(1+\cos t)}{\sin^2 t}=\lim_{t\to 0}\frac{-(1+\cos t)}{\sin t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-1-\cos t}{\frac{\sin t}{t}\times t}=\lim_{t\to 0}\frac{-1-\cos t}{t}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-1-\cos t}{t}=\frac{-2}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-1-\cos t}{t}=\frac{-2}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

سخت

۲۱

$$f(x)=\frac{(x+1)\sqrt{x}}{x^3-x}\quad,\quad x^3-x=0\Rightarrow x(x^2-1)=0\Rightarrow x=0\,,\,\pm 1$$

شرط رادیکال : $x\geq 0\ \Rightarrow D_f=[0,+\infty)-\{0,1\}=(0,+\infty)-\{1\}$

تابع در همسایگی $x=-1$ تعریف نشده است، پس خط $x=-1$ مجانب قائم تابع نیست.

حال تابع را تا حد ممکن ساده می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{(x+1)\sqrt{x}}{x(x^2-1)}=\frac{(x+1)\sqrt{x}}{x(x-1)(x+1)}=\frac{\sqrt{x}}{x(x-1)}=\frac{1}{(x-1)\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{(x-1)\sqrt{x}}=\frac{1}{-1\times\sqrt{0^+}}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x-1)\sqrt{x}}=\frac{1}{(1-\varepsilon-1)\times 1}=\frac{1}{-\varepsilon}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(x-1)\sqrt{x}}=\frac{1}{(1+\varepsilon-1)\times 1}=\frac{1}{+\varepsilon}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

خطوط $x=0$ و $x=1$ مجانب‌های قائم تابع هستند.

سخت

۲۲ حالت -1 مخرج ریشه مضاعف داشته باشد.

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2+mx+6}$$

$$x^2+mx+6=0\Rightarrow\Delta=0\Rightarrow m^2-24=0\Rightarrow m=\pm 2\sqrt{6}$$

$$m=2\sqrt{6}\Rightarrow f(x)=\frac{x+2}{x^2+2\sqrt{6}x+6}=\frac{x+2}{(x+\sqrt{6})^2}$$

فقط $x=-\sqrt{6}$ مجانب قائم است.

$$m=-2\sqrt{6}\Rightarrow f(x)=\frac{x+2}{x^2-2\sqrt{6}x+6}=\frac{x+2}{(x-\sqrt{6})^2}$$

فقط $x=\sqrt{6}$ مجانب قائم است.

حالت ۲ : عبارت $x+2$ از صورت و مخرج ساده شود، یعنی مخرج بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد.

$$x+2=0\Rightarrow x=-2\Rightarrow x^2+mx+6=0\Rightarrow 4-2m+6=0\Rightarrow m=5$$

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2+5x+6}=\frac{x+2}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+3}$$

فقط $x=-3$ مجانب قائم است.

سخت

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

۲۳

$$f(x)=\frac{(x+۱)(x+۳)+۴x+۳}{x^۲+mx+۹}$$

حالت ۱) مخرج ریشه مضاعف داشته باشد.

$$x^۲+mx+۹=۰\Rightarrow\Delta=۰\Rightarrow m^۲-۳۶=۰\Rightarrow m=\pm۶$$

$$m=۶\Rightarrow f(x)=\frac{(x+۱)(x+۳)}{x^۲+۶x+۹}=\frac{(x+۱)(x+۳)}{(x+۳)^۲}=\frac{x+۱}{x+۳}$$

فقط $x=-۳$ مجانب قائم است.

$$m=-۶\Rightarrow f(x)=\frac{(x+۱)(x+۳)}{x^۲-۶x+۹}=\frac{(x+۱)(x+۳)}{(x-۳)^۲}$$

فقط $x=۳$ مجانب قائم است.

حالت ۲) مخرج بر $x+۳$ بخش پذیر باشد

$$x+۳=۰\Rightarrow x=-۳\Rightarrow x^۲+mx+۹=۰\Rightarrow ۹-۳m+۹=۰\Rightarrow m=۶$$

این حالت در بالا بررسی شده است.

حالت ۳) مخرج بر $x+۱$ بخش پذیر باشد.

$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\Rightarrow x^۲+mx+۹=۰\Rightarrow ۱-m+۹=۰\Rightarrow m=۱۰$$

$$f(x)=\frac{(x+۱)(x+۳)}{x^۲+۱۰x+۹}=\frac{(x+۱)(x+۳)}{(x+۱)(x+۹)}=\frac{x+۳}{x+۹}$$

فقط $x=-۹$ مجانب قائم است.

سخت

۲۴

$$f(x)=\frac{\tan x}{۲\sin x-۱}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{۲\sin x-۱}=\frac{\sin x}{\cos x(۲\sin x-۱)}$$

$$\cos x(۲\sin x-۱)=۰\Rightarrow\cos x=۰\ ,\ \sin x=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{[۰,۲\pi]}x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}$$

$$\sin x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\xrightarrow{۰\le x\le ۲\pi}x=\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\xrightarrow{۰\le x\le ۲\pi}x=\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}$$

با توجه به این که هیچ‌کدام از مقادیر $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$ و $x=\frac{\pi}{۶}$ و $x=\frac{۵\pi}{۶}$ صورت کسر یعنی $\sin x$ را صفر نمی‌کنند. پس همگی مجانب قائم هستند.

سخت

۲۵

$$f(x)=\frac{۱}{۲+x^۲}\qquad -۲\le x\le ۳$$

$$f'(x)=\frac{۰-۲x\times ۱}{(۲+x^۲)^۲}=\frac{-۲x}{(۲+x^۲)^۲}=۰\Rightarrow x=۰$$ نقطهٔ بحرانی

$$x=-۲\Rightarrow f(-۲)=\frac{۱}{۲+۴}=\frac{۱}{۶}$$

$$x=۰\Rightarrow f(۰)=\frac{۱}{۲}$$

$$x=۳\Rightarrow f(۳)=\frac{۱}{۲+۹}=\frac{۱}{۱۱}$$

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

$\max = \frac{1}{2}$ مطلق ، $\min = \frac{1}{11}$ مطلق

متوسط

۲۶ تابع f روی R پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+12}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+12) - 2x \times x^2}{(x^2+12)^2} = \frac{24x}{(x^2+12)^2}$$

$$f''(x) = \frac{24(x^2+12)^2 - 2 \times 2x(x^2+12)^2 \times 24x}{(x^2+12)^4} = \frac{(x^2+12)(24x^2+24\times 12 - 4x \times 24x)}{(x^2+12)^4}$$

$$f''(x) = \frac{24x^2+288-96x^2}{(x^2+12)^3} = \frac{288-72x^2}{(x^2+12)^3} = \frac{72(4-x^2)}{(x^2+12)^3}$$

علامت f'' فقط به صورت آن بستگی دارد زیرا مخرج آن عبارتی همواره مثبت است.

$$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f''(x) = \frac{72(4-x^2)}{(x^2+12)^3}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

نقاط $x = \pm 2$ نقاط عطف تابع هستند.

سخت

۲۷ تابع f در کل R پیوسته است.

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x \times x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2 - 2 \times 2x(x^2+1)(x^4+3x^2)}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)\left((4x^3+6x)(x^2+1) - 4x(x^4+3x^2)\right)}{(x^2+1)^4} = \frac{4x^5+4x^3+6x^3+6x-4x^5-12x^3}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{6x-2x^3}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow 2x(3-x^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \ , \ x = \pm\sqrt{3}$$

عطف f'' فقط به صورت آن بستگی دارد زیرا مخرج عبارتی همواره مثبت است.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x) = \frac{6x-2x^3}{(x^2+1)^3}$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
		$\smile$		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

نقاط $x = 0$ و $x = \pm\sqrt{3}$ نقاط عطف تابع هستند.

سخت

۲۸

$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ نقطهٔ عطف $A(1,3)$

$$f(1) = 3 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 3 \Rightarrow a+b = 6$$

$$f'(x) = \frac{a(x^2+1) - 2x(ax+b)}{(x^2+1)^2} = \frac{ax^2+a-2ax^2-2bx}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2-2bx+a}{(x^2+1)^2}$$

استاد علیرضا افشار
@Alirezaafsharofficial

$$f''(x)=\frac{(-۲ax-۲b)(x^۲+۱)^۲-۲\times ۲x(x^۲+۱)(-ax^۲-۲bx+a)}{(x^۲+۱)^۴}$$

$$f''(x)=\frac{(x^۲+۱)\left((-۲ax-۲b)(x^۲+۱)-۴x(-ax^۲-۲bx+a)\right)}{(x^۲+۱)^۴}$$

$$f''(x)=\frac{(-۲ax-۲b)(x^۲+۱)-۴x(-ax^۲-۲bx+a)}{(x^۲+۱)^۳}\Rightarrow f''(۱)=۰$$

$$\Rightarrow(-۲a-۲b)\times ۲-۴(-a-۲b+a)=۰\Rightarrow -۴a-۴b+۸b=۰$$

$$\Rightarrow -۴a+۴b=۰\Rightarrow b=a\Rightarrow a+b=۶\Rightarrow ۲a=۶\Rightarrow a=b=۳$$

سخت

۲۹ در تابع درجهٔ سوم مرکز تقارن همان نقطهٔ عطف تابع است.

$$f(x)=ax^۳+bx^۲+c \quad \text{نقطهٔ عطف } A(۱,-۱)\Rightarrow f(۱)=-۱\Rightarrow a+b+c=-۱ \qquad (۱)$$

$$f'(x)=۳ax^۲+۲bx\Rightarrow f''(x)=۶ax+۲b\Rightarrow f''(۱)=۰\Rightarrow ۶a+۲b=۰\Rightarrow b=-۳a \qquad (۲)$$

$$x+۳y=۷\Rightarrow ۳y=-x+۷\Rightarrow y=-\frac{۱}{۳}x+\frac{۷}{۳}\Rightarrow \text{شیب}=-\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \text{شیب مماس در عطف}=۳\Rightarrow f'(۱)=۳\Rightarrow ۳a+۲b=۳ \qquad (۳)$$

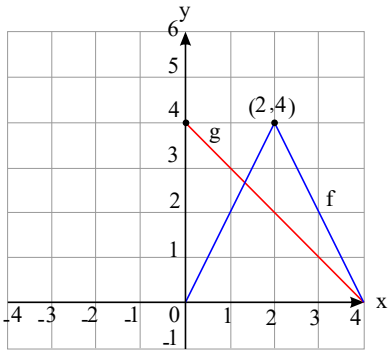
$$(۲)\ ,\ (۳)\Rightarrow ۳a+۲(-۳a)=۳\Rightarrow ۳a-۶a=۳\Rightarrow a=-۱\Rightarrow b=۳$$

$$(۱)\Rightarrow -۱+۳+c=-۱\Rightarrow c=-۳$$

سخت

۳۰

الف) توابع f و g توابع خطی هستند و باید ضابطهٔ آن‌ها را بیابیم. برای تابع f باید خط گذرنده از نقاط $(۰,۰)$ و $(۲,۴)$ و همچنین خط گذرنده از نقاط $(۲,۴)$ و $(۴,۰)$ را بیابیم.



$$(۰,۰),(۲,۴)\Rightarrow m=\frac{۴-۰}{۲-۰}=۲\Rightarrow y-۰=۲(x-۰)\Rightarrow y=۲x$$

$$(۲,۴),(۴,۰)\Rightarrow m=\frac{۴-۰}{۲-۴}=-۲\Rightarrow y-۰=-۲(x-۴)\Rightarrow y=-۲x+۸$$

$$f(x)=\begin{cases}۲x & ۰\le x\le ۲\\ -۲x+۸ & ۲<x\le ۴\end{cases}$$

برای یافتن تابع g باید خط گذرنده از نقاط $(۰,۴)$ و $(۴,۰)$ را بیابیم.

$$(۰,۴),(۴,۰)\Rightarrow m=\frac{۴-۰}{۰-۴}=-۱\Rightarrow y-۰=-۱(x-۴)\Rightarrow y=-x+۴\Rightarrow g(x)=-x+۴$$

$$h(x)=f(x)\cdot g(x)\Rightarrow h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$$

$$f(۱)=۲\ ;\ ۰<x<۲\Rightarrow f(x)=۲x\Rightarrow f'(x)=۲\Rightarrow f'(۱)=۲$$

"مشاوره"
@alirezaafsharofficial

$g(۱) = ۳\ ,\ g(x) = -x + ۴ \Rightarrow g'(x) = -۱ \Rightarrow g'(۱) = -۱$

$h'(۱) = f'(۱) \cdot g(۱) + g'(۱) \cdot f(۱) = ۲ \times ۳ + (-۱) \times ۲ = ۶ - ۲ = ۴$

تابع f در $x = ۲$ مشتق‌ناپذیر است زیرا:

$$f'_-(۲) = \lim_{x \to ۲^-} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{۲x - ۴}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{۲(x - ۲)}{x - ۲} = ۲$$

$$f'_+(۲) = \lim_{x \to ۲^+} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{-۲x + ۸ - ۴}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{-۲(x - ۲)}{x - ۲} = -۲$$

چون $f'(۲)$ موجود نیست بنابراین $h'(۲)$ نیز وجود ندارد.

$f(۳) = ۲\ ,\ f'(۳) = -۲\ ,\ g(۳) = ۱\ ,\ g'(۳) = -۱$

$h'(۳) = f'(۳) \cdot g(۳) + g'(۳) \cdot f(۳) = -۲ \times ۱ + (-۱) \times ۲ = -۴$

ب)

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^۲(x)}$$

$$k'(۱) = \frac{f'(۱)g(۱) - g'(۱)f(۱)}{g^۲(۱)}$$

$$k'(۱) = \frac{۲ \times ۳ - (-۱) \times ۲}{۳^۲} = \frac{۶ + ۲}{۹} = \frac{۸}{۹}$$

چون $f'(۲)$ موجود نیست پس $k'(۲)$ هم وجود ندارد.

$$k'(۳) = \frac{f'(۳)g(۳) - g'(۳)f(۳)}{g^۲(۳)} = \frac{(-۲) \times ۱ - (-۱) \times ۲}{۱^۲} = \frac{-۲ + ۲}{۱} = ۰$$

سخت

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial