نام و نام خانوادگی:

تعداد سوال: ۳۰

نام آزمون: ریاضیات گسسته تکمیلی تشریحی

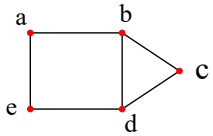
زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه

افشار

مرکز مشاوره تحصیلی دکتر
علیرضا افشار

۱) در گرافی با ۵ رأس عدد احاطه گری یک می‌باشد. حداقل و حداکثر تعداد یال‌های این گراف چقدر است؟

۲) عدد احاطه گری گراف مقابل را مشخص کنید.



۳) با ۷ رأس a,b,c,d,e,f,g چند گراف ساده می‌توان ساخت بطوری که همسایگی باز رأس a حداقل ۴ عضو داشته باشد؟

۴) چند گراف r - منتظم مرتبهٔ ۱۵ وجود دارد؟

۵) آیا گرافی ساده و ۱۰ - منتظم با ۳۵ یال وجود دارد؟

۶) در گراف $K_۶$ اگر $V=\{a,b,c,d,e,f\}$:

الف) بین ۲ رأس b,a چند مسیر به طول ۴ وجود دارد که از رأس c بگذرند؟

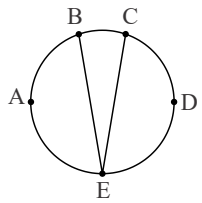
ب) بین ۲ رأس b,a چند مسیر به طول ۴ وجود دارد که از d نگذرند؟

ج) بین ۲ رأس b,a چند مسیر به طول ۴ وجود دارد که از رأس c بگذرند ولی از رأس d نگذرند؟

د) بین ۲ رأس b,a چند مسیر به طول ۴ وجود دارد که شامل یال cd باشند؟

۷) گرافی با ۲۰ رأس همبند است. بیشترین و کمترین تعداد یال‌های این گراف را بنویسید.

۸) در شکل زیر چند مسیر مختلف از A به D وجود دارد؟ از هر مسیر و هر نقطه حداکثر یک‌بار مجاز به عبور هستیم.



۹) در چند عدد ۳ رقمی حاصلضرب رقم‌ها زوج است؟

۱۰) علی و ۶ نفر از دوستانش به چند حالت می توانند در یک ردیف قرار بگیرند به طوری که علی شخص وسط نباشد؟

۱۱) حاصل عبارت A چند است؟

$$A=\binom{۱۷}{۳}+\binom{۱۷}{۴}+\cdots+\binom{۱۷}{۸}$$

۱۲) تاسی را به طور متوالی پرتاب می کنیم. چند حالت مختلف وجود دارد برای این که تاس در نهمین پرتاب برای اولین بار ۶ بیاید؟

۱۳) ثابت کنید $\log_۲^۵$ عددی گنگ است.

۱۴) ثابت کنید در بازهٔ $(۰,۱)$ عضوی که در همهٔ اعضا بزرگتر باشد وجود ندارد.

۱۵) عدد a مضرب ۳ است. اگر بدانیم باقیماندهٔ تقسیم a بر ۱۳ برابر یک است، باقیماندهٔ تقسیم $\frac{a}{۳}$ بر ۱۳ را محاسبه کنید.

۱۶) یک عدد مربع کامل در تقسیم بر ۵ چه باقیمانده‌هایی می‌تواند داشته باشد؟

۱۷) در یک تقسیم مقسوم‌علیه برابر ۱۷ باقیمانده برابر ۳ می‌باشد حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد بدون آنکه خارج قسمت، مقسوم علیه تغییر کنند؟

استاد علیرضا افشار
مشاوره
@Alirezaafsharofficial

۱۸) ثابت کنید: $[۳۷]_{۲۴} \subseteq [۵]_{۸}$

۱۹) تمام جواب‌های n که به ازای آن‌ها معادلهٔ $(۲m^{۲}+۱)x+(۲m-۴)y=n$ همواره در $\mathbb{Z}$ جواب دارد را بیابید:

۲۰) فرض کنید $(b\,,\,c)=۱$ ثابت کنید: $(ac\,,\,b)=(a\,,\,b)$.

۲۱) ثابت کنید اگر $a=bq+r$ آنگاه $(a\,,\,b)=(b,r)$

۲۲) ثابت کنید اگر $(a\,,\,b)=d$ آنگاه $(\frac{a}{d}\,,\,\frac{b}{d})=۱$.

۲۳) فرض کنید $ax-by=۱$ حاصل $(a+b\,,\,x+y)$ را بیابید:

۲۴) فرض کنید a عددی صحیح باشد. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $a^{۲}+a+۱\,,\,a^{۲}-a+۱$ را بیابید:

۲۵) فرض کنید $(a\,,\,b)=۱\,,\,(a\,,\,c)=۱$ آیا می‌توان نتیجه گرفت $(a^{۲}+b\,,\,ab)=۱\,,\,(a^{۲}+b\,,\,a^{۲}-b)=۱$؟
در غیر این صورت مثال نقض بزنید:

۲۶) در جعبه‌ای ۴ گوی زرد، ۶ گوی مشکی، ۸ گوی سبز و ۱۰ گوی آبی داریم. حداقل چند گوی خارج کنیم تا مطمئن شویم که حداقل ۷ گوی خارج‌شده هم‌رنگ هستند؟

۲۷) ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم. به‌نظر شما، این عمل به چند روش امکان‌پذیر است؟ اگر:

الف) هیچ محدودیتی نباشد؛

ب) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؛

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؛

ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

۲۸) به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم:

الف) به دلخواه انتخاب کنیم؛

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم؛

پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؛

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

۲۹) اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هریک از این اعداد ۵رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟

۳۰) به چند طریق می‌توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به‌طوری‌که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

پاسخنامه تشریحی

۱) اگر $\gamma(G) = ۱$ یعنی حداقل یک رأس این گراف به تمام رأس‌های دیگر متصل است پس این گراف حداقل $p - ۱$ یال دارد. از طرفی می‌تواند کامل باشد یعنی حداکثر $\frac{p(p-۱)}{۲}$ یال دارد.

$$q_{min} = ۵ - ۱ = ۴$$
$$q_{max} = \frac{۵ \times ۴}{۲} = ۱۰$$

سخت

۲) راه اول - مجموعهٔ $A = \{a, c\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف محسوب می‌شود. بنابراین عدد احاطه‌گری این گراف کوچکتر یا مساوی ۲ است. یعنی $\gamma(G) \leqslant ۲$ از طرفی اگر $\gamma(G) = ۱$ باشد باید یک رأس در گراف موجود باشد که به تنهایی تمام رئوس دیگر را احاطه کند که این غیرممکن است پس:

$$\gamma(G) > ۱$$

در نتیجه:

$$۱ < \gamma(G) \leqslant ۲ \rightarrow \gamma(G) = ۲$$

راه دوم-

$$n = ۵$$
$$\triangle = ۳$$

$$\lceil \frac{n}{\triangle + ۱} \rceil \leqslant \gamma(G) \Rightarrow \lceil \frac{۵}{۴} \rceil \leqslant \gamma(G) \Rightarrow \gamma(G) \geqslant ۲$$

از طرفی مجموعهٔ $A = \{a, c\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است پس $\gamma(G) \leqslant ۲$ در نتیجه:

$$\gamma(G) = ۲$$

سخت

۳) رأس a را کنار می‌گذاریم پس با بقیه رأس‌ها $۲^{\binom{۶}{۲}} = ۲^{۱۵}$ گراف می‌توان ساخت. درجه رأس a بزرگتر یا مساوی ۴ است پس:

$$\deg a = ۴ \text{ یا } ۵ \text{ یا } ۶ \rightarrow \binom{۶}{۴} + \binom{۶}{۵} + \binom{۶}{۶} = ۲۲$$

طبق اصل ضرب:

$$۲۲ \times ۲^{۱۵} = ۱۱ \times ۲ \times ۲^{۱۵} = ۱۱ \times ۲^{۱۶}$$

سخت

۴)

$$rp = ۲q \Rightarrow ۱۵r = ۲q$$

سمت راست تساوی یعنی $۲q$ زوج است پس $۱۵r$ باید زوج باشد پس r زوج است.

از طرفی $r < ۱۵$ پس:

$$r = ۰, ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴$$

۸ گراف

سخت

۵)

$$rp = ۲q \rightarrow ۱۰p = ۷۰ \rightarrow p = ۷$$

با ۷ رأس حداکثر $q = \frac{۷ \times ۶}{۲} = ۲۱$ یال می‌توان رسم کرد.

پس ۱۰ - منتظم با ۳۵ یال وجود ندارد.

سخت

۶)

الف)

$$\left.\begin{array}{l} \binom{۴-۱}{۳-۱} = \binom{۳}{۲} = \frac{۳ \times ۲}{۲} = ۳ \\ ۳^{\circ}_{۱} = ۶ \end{array}\right\} \rightarrow ۳ \times ۶ = ۱۸$$

ب)

$$a, \square\square\square, b \Rightarrow ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$$

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@drafshar_official

ج)

$$a \underbrace{_,_,_}_{c \text{ به ۳ طریق ۲ و رأس دیگر به } ۱\times۲ \text{ طریق}} b \to ۳ \times ۲ = ۶$$

د) رأس‌های d, c باید کنار هم باشند.

$$\left.\begin{array}{l} a \underbrace{c\,d}_{۲!} \underbrace{_}_{۲} b \to ۴ \\ \text{یا} \\ a \underbrace{_}_{۲} \underbrace{c\,d}_{۲!} b \to ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow ۴ + ۴ = ۸$$

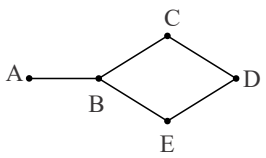
سخت

۷) $q \leqslant \dfrac{p(p-۱)}{۲} \to q \leqslant \dfrac{۲۰ \times ۱۹}{۲} \to q \leqslant ۱۹۰ \to \max(q) = ۱۹۰$

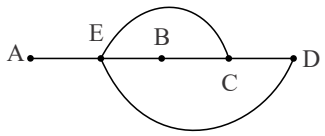
$p - ۱ \leqslant q \Rightarrow q \geqslant ۱۹ \to \min(q) = ۱۹$

سخت

۸) باتوجه به شکل سؤال اگر از A ابتدا به B برود، شکل به صورت زیر رسم می‌کنیم و تعداد مسیرها از A به D برابر با ۲ است.



و اگر از A ابتدا به E برود، شکل به صورت زیر است و تعداد مسیرها از A به D برابر با ۳ است.



پس تعداد کل مسیرها برابر با ۵ است.

سخت

۹) حاصلضرب رقم‌ها در صورتی فرد است که همهٔ رقم‌ها فرد باشد. پس برای دهگان و یکان هر کدام ۵ انتخاب وجود دارد (۰ یا ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸) و برای صدگان ۴ انتخاب وجود دارد (۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸)

بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$$\underbrace{\boxed{۴ \text{ حالت}}}_{\text{صدگان}} \underbrace{\boxed{۵ \text{ حالت}}}_{\text{دهگان}} \underbrace{\boxed{۵ \text{ حالت}}}_{\text{یکان}} \to \text{حالت مطلوب}: ۴ \times ۵ \times ۵ = ۱۰۰$$

سخت

۱۰) شمارش تعداد حالات نامطلوب یعنی حالتی که علی وسط نشسته باشد، ساده تر است. می دانیم که:

تعداد کل حالات = تعداد حالاتی که علی وسط نباشد. + تعداد حالاتی که علی وسط باشد.

فرض کنیم علی شخص وسط باشد، برای ۶ نفر دیگر به تعداد !۶ جایگشت وجود دارد. از طرفی تعداد کل حالات برابر با جایگشت همهٔ ۷ نفر است که برابر با !۷ است.

بنابراین جواب نهایی برابر است با:

$$۷! - ۶! = ۶!(۷ - ۱) = ۶ \times ۶! = ۶ \times ۷۲۰ = ۴۳۲۰$$

سخت

۱۱) نکته: به ازای عبارات تعریف شده، همواره داریم:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$A = \binom{۱۷}{۳} + \binom{۱۷}{۴} + \cdots + \binom{۱۷}{۸} = \binom{۱۷}{۱۴} + \binom{۱۷}{۱۳} + \cdots + \binom{۱۷}{۹}$$

نکته: می‌دانیم به ازای عبارات تعریف شده، همواره داریم:

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \cdots + \binom{n}{n} = ۲^n$$

پس به ازای $n = ۱۷$ داریم:

استاد علیرضا افشار
@Alirezaafsharofficial

$$\binom{۱۷}{۰}+\binom{۱۷}{۱}+\binom{۱۷}{۲}+\underbrace{\binom{۱۷}{۳}+\cdots+\binom{۱۷}{۸}}_{A}+\underbrace{\binom{۱۷}{۹}+\cdots+\binom{۱۷}{۱۴}}_{A}+\binom{۱۷}{۱۵}+\binom{۱۷}{۱۶}+\binom{۱۷}{۱۷}=۲^{۱۷}$$

سخت

(۱۲) برای اینکه تاس در نهمین پرتاب برای اولین بار ۶ بیاید، باید در ۸ پرتاب اول ۶ نیاید. یعنی در هر کدام از ۸ پرتاب اوّل ۵ حالت قابل قبول وجود دارد (همهٔ اعداد غیر از ۶)، بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$$\underbrace{۵\times ۵\times\cdots\times ۵}_{\text{۸بار}}=۵^{۸}$$

سخت

(۱۳) فرض کنیم $\log_{۲}^{۵}$ گویا باشد یعنی اعداد طبیعی n,m وجود دارند به طوریکه $\log_{۲}^{۵}=\frac{m}{n}$ در اینصورت $۲^{\frac{m}{n}}=۵$ در نتیجه $۲^{n}=۵^{n}$ که این تساوی هیچ‌گاه برقرار نیست زیرا به ازای هر n,m طبیعی راست تساوی زوج و سمت چپ تساوی عددی فرد است. بنابراین از این تناقض می‌توان درستی حکم را نتیجه گرفت.

سخت

(۱۴) فرض کنید a عضوی از $(۰,۱)$ باشد که از همهٔ اعضای $(۰,۱)$ بزرگتر باشد آنگاه چون $۰<a<۱$ پس $۰<a<\frac{a+۱}{۲}<۱$ یعنی عضوی از $(۰,۱)$ وجود دارد که از a بزرگتر است. پس a بزرگترین عضو بازهٔ $(۰,۱)$ نیست از این تناقض نتیجه می‌گیریم $(۰,۱)$، بزرگترین عضو ندارد.

سخت

(۱۵) طبق فرض $a=۱۳k+۱$ برای k تقسیم بر ۳، سه حالت $۳k'\pm ۱,۳k'$ وجود دارد اگر k به دو صورت $۳k'$ و یا $۳k'+۱$ باشد دیگر a مضرب ۳ نمی‌شود. بنابراین k باید به فرم $۳k'-۱$ باشد؛ حال می‌توان نوشت:

$$a=۱۳k+۱=۱۳(۳k'-۱)+۱=۱۳\times ۳k'-۱۳+۱=۱۳\times ۳k'-۱۲\Rightarrow\frac{a}{۳}=۱۳k'-۴$$
$$=۱۳q+۹$$

پس باقیماندهٔ تقسیم $\frac{a}{۳}$ بر ۱۳ برابر ۹ است.

سخت

(۱۶) عدد صحیح و دلخواه a در تقسیم بر ۵ به یکی از ۵ صورت $۵k$, $۵k\pm ۱$, $۵k\pm ۲$ است. حال کافی است هریک از صورت‌های فوق را به توان ۲ برسانیم تا باقیمانده‌های ممکن مربع هر عدد صحیح در تقسیم بر ۵ بدست آید:

$$a=۵k\to a^{۲}=۵k'$$
$$a=۵k\pm ۱\to a^{۲}=۵k'+۱$$
$$a=۵k\pm ۲\to a^{۲}=۵k'+۴$$

پس مربع هر عدد صحیح درتقسیم بر ۵ تنها می‌تواند باقیمانده‌های ۰ و ۱ و ۴ را بسازد.

سخت

(۱۷) طبق فرض $a=۱۷q+۱۳$ اگر x واحد به a اضافه کنیم به طوریکه خارج قسمت تغییر نکند، الگوریتم تقسیم به فرم زیر در می‌آید:

$$a+x=۱۷q+(۳+x)$$

به طوریکه $۳+x<۱۷$ یا $x<۱۴$ در نتیجه حداکثر مقدار x برابر ۱۳ می‌باشد.

سخت

(۱۸)

$$\left.\begin{array}{l} a\in[۳۷]_{۲۴}\to a\overset{۲۴}{\equiv}۳۷\xrightarrow{۸|۲۴}a\overset{۸}{\equiv}۳۷\\ ۳۷\overset{۸}{\equiv}۵\end{array}\right\}\to a\overset{۸}{\equiv}۵$$

در نتیجه $a\in[۵]_{۸}$ بنابراین $[۳۷]_{۲۴}\subseteq[۵]_{۸}$.

سخت

(۱۹) فرض کنید $(۲m^{۲}+۱,۲m-۴)=d$ باید $d|n$ می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} d|۲m-۴\to d|۲m^{۲}-۴m\\ d|۲m^{۲}+۱\end{array}\right\}\to d|۴m+۱$$

$$\left.\begin{array}{l} d|۴m+۱\\ d|۲m-۴\to d|۴m-۸\end{array}\right\}\to d|۹$$

بنابراین اگر $n=۹k$ باشد d در هر صورت آن‌را عاد خواهد کرد.

سخت

(۲۰) قرار دهید $(ac\,,\,b)=d'$, $(a\,,\,b)=d$ در این صورت داریم:

$$(a\,,\,b)=d\to\begin{cases} d|a\to d|ac\\ d|b\end{cases}\xrightarrow{(ac\,,\,b)=d'}d\le d'$$

چون $(ac\,,\,b)=d'$ پس $d'|ac\,,\,d'|b$ و چون $(c\,,\,b)=۱$ و با توجه به اینکه c نسبت به هر مقسوم‌علیه b از جمله d' اول است بنابراین $(c\,,\,d')=۱$ حال داریم:

$$\begin{cases} d'|ac\xrightarrow{(c\,,\,d')=۱}d'|a\xrightarrow{(a\,,\,b)=d}d'\le d\\ d'|b\end{cases}$$

از $d\le d'\,,\,d'\le d$ نتیجه می‌گیریم $d=d'$.

سخت

"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial

۲۱ تذکر: $(a\,,\,b)=(a\,,\,ka+b)\ k\in\mathbb{Z}$

$$(a\,,\,b)=(bq+r\,,\,b)=(bq+r-bq\,,b)=(r\,,\,b)$$

سخت

۲۲ فرض کنید $(\frac{a}{d}\,,\,\frac{b}{d})=d'$ و می‌دانیم $d'\geq ۱$ می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} d'|\frac{a}{d}\to dd'|a \\ d'|\frac{b}{d}\to dd'|b \end{array}\right\}\xrightarrow[dd'|(a\,,\,b)]{(a\,,\,b)=d} dd'\leq d\to d'\leq ۱$$

حال از $d'\geq ۱\,,\,d'\leq ۱$ نتیجه می‌گیریم: $d'=۱$.

سخت

۲۳ فرض کنید $(a+b\,,\,x+y)=d$ آنگاه:

$$\left.\begin{array}{l} d|a+b\to d|x(a+b) \\ d|x+y\to d|b(x+y) \end{array}\right\}\to d|ax+b\cancel{x}-\cancel{b}x-by\to d|ax-by\to d|۱$$

بنابراین $d=۱$.

سخت

۲۴ می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} d|a^۲+a+۱\xrightarrow{a^۳-۱=(a-۱)(a^۲+a+۱)}d|a^۳-۱ \\ d|a^۲-a+۱\xrightarrow{a^۳+۱=(a+۱)(a^۲-a+۱)}d|a^۳+۱ \end{array}\right\}\to d|a^۳+۱-a^۳+۱\to d|۲$$

بنابراین ۲ یا $d=۱$ از طرفی چون $a^۲+a$ به ازای هر عدد صحیح و دلخواه a زوج است بنابراین $a^۲+a+۱$ همواره فرد است و چون $d|a^۲+a+۱$ بنابراین $d=۱$.

سخت

۲۵ درستی $(a^۲+b\,,\,ab)=۱$ را اثبات می‌کنیم و برای $(a^۲+b\,,\,a^۲-b)=۱$ مثال نقض می‌آوریم:

فرض کنید $(a^۲+b\,,\,ab)=d$ آنگاه:

$$\left.\begin{array}{l} d|ab \\ d|a^۲+b\xrightarrow{\times a}d|a^۳+ab \end{array}\right\}\to\left\{\begin{array}{l} d|-ab \\ d|a^۳+ab \end{array}\right.\to d|a^۳$$

$$\left.\begin{array}{l} d|a^۲b^۲+b^۳ \\ d|a^۲b^۲ \end{array}\right\}\to d|b^۳$$

$$d|(a^۳\,,\,b^۳)\to d|۱\to d=۱$$

و اگر قرار دهید $a=۳\,,\,b=۵\,,\,c=۵$ مثال نقضی برای $(a^۲+b\,,\,a^۲-b)=۱$ بدست می‌آید.

سخت

۲۶ در بدترین حالت همهٔ گوی‌های زرد و مشکی و ۶ گوی سبز و ۶ گوی آبی خارج کرده‌ایم و حالا با خارج کردن یک گوی دیگر به مقصودمان می‌رسیم. پس حداقل باید ۲۳ گوی خارج کنیم.

سخت

۲۷

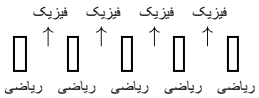
الف) جایگشت ۹ کتاب جواب این سؤال است: $۹!$

ب) جایگشت ۶ شیء مقابل برابر با $۶!$ است. جایگشت کتاب‌های فیزیک کنار هم $۴!$ است.

پس جواب نهایی برابر است با: $۶!۴!$

پ) باتوجه به شکل مقابل کتاب‌های ریاضی کنار هم $۵!$ جایگشت و کتاب‌های فیزیک $۴!$ جایگشت دارند.

پس جواب نهایی برابر است با: $۵!۴!$



ت) جایگشت ۷ شیء مقابل $۷!$ است و جایگشت ۲ کتاب فیزیک و یک کتاب ریاضی خاص کنار هم $۳!$ است.

پس جواب نهایی برابر است با: $۷!۳!$

سخت

۲۸ باید تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۱۱$ را بیابیم. در هر قسمت شرط خاصی بیان شده است.

الف) این قسمت شرط جدیدی ندارد. پس جواب برابر است با: $\binom{۵+۱۱-۱}{۵-۱}=\binom{۱۵}{۴}$

ب) اینجا شرط $x_i\geq ۱\,,\,i=۱,۲,\cdots,۵$ برقرار است. با تغییر متغیر $x_i=y_i+۱$ کافی است تعداد جواب صحیح و نامنفی معادلهٔ زیر را بیابیم:

$$y_۱+y_۲+y_۳+y_۴+y_۵=۱۱-۵=۶$$

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafshar_official

جواب برابر است با:

$$\binom{۵+۶-۱}{۵-۱}=\binom{۱۰}{۴}$$

پ) با تغییر متغیر $x_۲=y_۲+۲$ و $x_۵=y_۵+۴$ داریم:

$$x_۱+y_۲+x_۳+x_۴+y_۵=۱۱-۶=۵$$

پس جواب برابر است با:

$$\binom{۵+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۹}{۴}$$

ت) با تغییر متغیر $x_۴=y_۴+۵$ و با فرض $x_۳=۰$ داریم:

$$x_۱+x_۲+y_۴+x_۵=۱۱-۵=۶$$

پس جواب برابر است با:

$$\binom{۴+۶-۱}{۴-۱}=\binom{۹}{۳}$$

سخت

۲۹

اگر سه رقم ۷ وجود داشته باشد تعداد حالات برابر است با:

$$\frac{۵!}{۳!}=۲۰$$

پس برای حالت سه رقم ۲ و سه رقم ۳ نیز تعداد حالات برابر با ۲۰ است.

اگر دو رقم ۷ و دو رقم ۲ وجود داشته باشد تعداد حالات برابر است با:

$$\frac{۵!}{۲!۲!}=۳۰$$

برای حالت دو رقم ۷ و دو رقم ۳ و حالت دو رقم ۲ و دو رقم ۳ نیز تعداد حالات برابر با ۳۰ است.

اگر دو رقم ۷ و بقیه غیرتکراری باشند، تعداد حالات برابر است با:

$$۶\times\frac{۵!}{۲!}=۳۶۰$$

برای حالت فقط دو رقم ۳ و حالت فقط دو رقم ۲ نیز تعداد حالات برابر با ۳۶۰ است.

اگر هیچ رقمی غیرتکراری نباشد، تعداد حالات برابر است با:

$$\binom{۶}{۲}۵!=۱۸۰۰$$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$۳\times۲۰+۳\times۳۰+۳\times۳۶۰+۱۸۰۰=۳۰۳۰$$

پس مدت زمان حداکثر برابر است با:

$$۳۰۳۰\times۶=۱۸۱۸۰\,(s)=۳۰۳\,(\min)$$

سخت

۳۰ کافی است تعداد جواب معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳=۶$ را با شرط $x_i\geq۱$ به‌دست آوریم که x_i تعداد فیلم داور iام است.

با تغییر متغیر $x_i=y_i+۱$ کافی است معادلهٔ زیر را بررسی کنیم:

$$y_۱+y_۲+y_۳=۳\quad y_i\geq۰$$

که تعداد جواب برابر است با:

$$\binom{۳+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۵}{۲}=۱۰$$

سخت

استاد علیرضا افشار
"مشاوره"
@Alirezaafsharofficial