تاریخ :   وقت : دقیقه

نام و نام خانوادگی :   تعداد سوالات: ۴۰

موضوع هندسه تحلیلی و جبر خطی(* نقطه و بردارها در فضای سه بعدی * معادلات خط و صفحه)

افشار

مرکز مشاوره تحصیلی دکتر علیرضا افشار

سریال ۹۱۲۷۸

۱. چند بردار به طول ۲ وجود دارد که بر هر سه بردار $\vec{a}(2,1,-1)$ و $\vec{b}(1,2,2)$ و $\vec{c}(0,-3,-5)$ عمود باشد؟

۱) ۰   ۲) ۲   ۳) ۱   ۴) بی شمار

۲. به ازای کدام مقدار a دو خط به معادلات $\frac{z}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{x+1}{2}$, $-z=\frac{y+a}{2}=\frac{x-3}{1}$ متقاطع‌اند؟

۱) -5 ۲) -3 ۳) 3 ۴) 5

۳. نقطه‌ی M واقع بر خط به معادله $y=0$ و $x=2z+3$ است، اگر فاصله M از صفحه‌ای به معادله $2x+2y-z=0$ برابر ۵ باشد، ارتفاع مثبت نقطه M کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۴. اگر اندازه دو بردار $\vec{V}_1=2i+(a+1)j+4k$ و $\vec{V}_2=ai+4j+3k$ برابر باشند کسینوس زاویه بین دو بردار کدام است؟

۱) $\frac{16}{29}$ ۲) $\frac{24}{29}$ ۳) $\frac{4}{\sqrt{29}}$ ۴) $\frac{28}{29}$

۵. اگر D محل تلاقی عمود منصف های مثلث متساوی الاضلاع ABC باشد، حاصل $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$ را بیابید.

۱) $\vec{0}$ ۲) $3\overrightarrow{DA}$ ۳) $3\overrightarrow{DB}$ ۴) $3\overrightarrow{DC}$

۶. اندازه تصویر بردار $a(-1,1,2)$ بر بردار $b(1,1,1)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۷. طول نقطه‌ای از خط $x-1=1-y=z$ که فاصله‌ی آن از $M(-1,1,0)$ برابر ۲ باشد کدام است؟

۱) ۰   ۲) -۱   ۳) ۱   ۴) ۲

۸. تصویر خط $D:(y=1,z=2)$ روی صفحه‌ی yoz کدام است؟

۱) $x=0,y=1$ ۲) $z=0,y=1$ ۳) $A(0,1,2)$ ۴) $A(1,0,2)$

۹. معادله‌ی صفحه‌ای که از نقطه $(3,4,-5)$ گذشته و با بردارهای $V_1(3,1,-1)$ و $V_2(1,-2,1)$ موازی باشد، کدام است؟

۱) $3x+y-2z-3=0$ ۲) $x+y+z-2=0$

۳) $x+4y+7z-8=0$ ۴) $x+4y+7z+16=0$

۱۰. فاصله‌ی نقطه $M(1,-1,1)$ از خط $\begin{cases} 2x=1 \\ 2y+z=-1 \end{cases}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) $\frac{1}{4}$

۱۱. کسینوس زاویه‌ی بین دو خط $\begin{cases} mx=1 \\ z=2 \end{cases}, x-1=2y=\frac{z-3}{4}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{69}}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{65}}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۲. اگر سه بردار $a=i+2j+k$ و $b=\alpha i+j+3k$ و $c=2i+\beta j+k$ در رابطه‌ی $a\times b=a\times c$ صدق کنند حاصل $\alpha+\beta$ کدام است؟ (با فرض $b\neq c$)

۱) ۰ ۲) ۱- ۳) 1 ۴) 2

۱۳. معادله صفحه‌ی گذرنده از نقطه $(1,2,-1)$ و عمود بر خط $x=-2y=2z$ کدام است؟

۱) $x-2y+2z-4=0$ ۲) $2x-y+z+2=0$

۳) $x-2y+2z+4=0$ ۴) $2x-y+z+1=0$

۱۴. اگر خط $\frac{2z}{2a+2}=2y-1=\frac{x-7}{2a}$ با دو محور ox و oz زاویه های مساوی تشکیل دهد، مقدار a کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 2 ۴) 1

۱۵. فاصله هر نقطه روی خط $\frac{z}{3}=\frac{2y-4}{2n}=x+m$ از صفحه‌ی $3x-z+y=2$ برابر یک است. در این صورت $m+n$ کدام است؟

۱) $\pm\frac{\sqrt{11}}{3}$ ۲) $\pm\frac{\sqrt{3}}{11}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{11}$ یا ۰ ۴) $\frac{\sqrt{11}}{3}$ یا ۰

۱۶. فاصله‌ی نقطه‌ی $A(1,-1,2)$ از فصل مشترک دو صفحه‌ی $x+2y=4$ و $x-y=1$ کدام است؟

۱) 2 ۲) 3 ۳) $\sqrt{5}$ ۴) 4

۱۷. معادله خط گذرنده از نقطه $(1,0,-1)$ و عمود متقاطع بر خط $x-1=y+1=z$ کدام است؟

۱) $x=1\ ,\ z+y=1$ ۲) $x=1\ ,\ z+y=-1$

۳) $y=0\ ,\ x-y=-1$ ۴) $y=0\ ,\ x-z=1$

۱۸. دو یال مکعبی در راستای دو خط $D:\begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}$ و $D':(x=2\ ,\ y=1-z)$ قرار دارند. مساحت کل این مکعب کدام است؟

۱) 8 ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) 12 ۴) $2\sqrt{3}$

۱۹. مبدأ مختصات یکی از رئوس لوزی‌ای است که معادله‌ی یک قطر آن $\frac{z+4}{2}=y+3=\frac{x-1}{2}$ می‌باشد، عرض مرکز لوزی کدام است؟

۱) -2 ۲) 1 ۳) 2 ۴) -3

۲۰. به‌ازای کدام مقدار m خطوط $d:(x=my=\frac{z}{2})$ و $d':\begin{cases}x-y+2=0\\ z+y=1\end{cases}$ بر هم عمودند؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) 2 ۴) 1

۲۱. اگر a و b دو بردار باشند، به طوری که $|a\times b|=16$, $a\cdot b=-12$ و $|b|=5$، آنگاه $|a|$ کدام است؟

۱) $\frac{4\sqrt{7}}{5}$ ۲) 4 ۳) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ۴) 6

۲۲. برای سه بردار a و b و c داریم: $a+2b+2c=\overrightarrow{o}$. اگر $a\cdot c=3$ و $|c|=3$ و زاویه ی بین a و c، برابر 60° باشد، حاصل $a\cdot b$ کدام است؟

۱) 5 ۲) -5 ۳) 3 ۴) -3

۲۳. صفحه گذرنده بر خط به معادله $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-1}$ و نقطه $(0,3,0)$ محور Zها را با کدام ارتفاع قطع می کند؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) 2 ۴) 3

۲۴. اگر $|a|=\sqrt{5}$, $|b|=2$, $|c|=\sqrt{6}$ و $b+e_{a}=c\times a$ باشد، زاویه‌ی بین دو بردار a , b کدام است؟

۱) 90° ۲) 120° ۳) 60° ۴) 150°

۲۵. خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A(2,-3,4)$ و $B(1,0,-2)$ بر کدام صفحه‌ی زیر عمود است؟

۱) $x+3y-6z=7$ ۲) $2x+3y+4z=1$

۳) $2x-3y-4z=9$ ۴) $x-3y+6z=5$

۲۶. اگر دو بردار $a(4,3,m)$ و $b(2,-4,m+1)$ مفروض باشند به طوری که بردار $(a+b)$ نیمساز زاویه‌ی بین دو بردار b,a باشد، آنگاه مقدار m کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) -2

۲۷. a و b دو بردار یکه‌اند که با هم زاویه 30° می‌سازند. مساحت مثلثی که بر دو بردار $(3b+4a)$, $(2a-5b)$ ساخته می‌شود، کدام است؟

۱) $4/5$ ۲) $5/5$ ۳) $6/5$ ۴) $7/5$

۲۸. a برداری غیر صفر است و $a\times b=a\times c$ دراین صورت کدام گزینه در مورد بردارهای $a, b-c$ الزاما درست است؟

۱) برابرند ۲) عمودند ۳) موازی‌اند ۴) هم‌اندازه‌اند

۲۹. صفحه‌ای که شامل خط $d: x = y - 1 = 1 - z$ بوده و موازی خط $d' : \frac{x-1}{3} = y + 1 = \frac{z}{2}$ است، از نقطه‌ی $(m, 2m, 0)$ می‌گذرد. m کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) -1 ۴) -2

۳۰. نقطه‌ای روی خط $D: \begin{cases} x+y+z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$ از دو صفحه‌ی $P: x+2y+2z+3=0$ و $P': x+2y+2z+7=0$ به یک فاصله است. طول این نقطه کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۳۱. اگر $|a \times b| = 3$ باشد، اندازه بردار $(4a+b) \times (3a-b)$ کدام است؟

۱) 9 ۲) 21 ۳) 3 ۴) 18

۳۲. فرض کنید اندازه‌ی بردارهای a'' و b به‌ترتیب ۴ و ۳ زاویه‌ی بین بردارهای a, a'' برابر 120° باشد. اگر زاویه‌ی بین بردارهای a و b، حاده باشد. آن‌گاه اندازه‌ی بردار $a - 2b$ کدام است؟ (a'' قرینه‌ی a نسبت b است).

۱) $2\sqrt{19}$ ۲) $2\sqrt{7}$ ۳) 7 ۴) $5\sqrt{2}$

۳۳. اگر قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به صفحهٔ xy را B و قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به محور xها را C بنامیم و $|BC| = 10$ باشد، آن‌گاه فصلهٔ نقطهٔ A از صفحهٔ xz کدام است؟

۱) 5 ۲) 10 ۳) 15 ۴) 20

۳۴. فاصلهٔ نقطهٔ $P(2, m, 1)$ از نیمساز ناحیهٔ اول و سوم در صفحهٔ yz، برابر با $2\sqrt{3}$ است. مقدار مثبت m کدام است؟

۱) 4 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 5

۳۵. حاصل $(4\vec{a} + \vec{b}) \times (2\vec{a} - 3\vec{b})$ چند برابر $\vec{a} \times \vec{b}$ است؟

۱) 8 ۲) 10 ۳) 12 ۴) 14

۳۶. در صورتی که $|a| = |b| = 2$ و زاویهٔ بین دو بردار a و b برابر 150° باشد، مساحت مثلثی که توسط دو بردار $2a + 3b$ و $3a - 2b$ ساخته می‌شود، کدام است؟

۱) 26 ۲) 13 ۳) 24 ۴) 12

۳۷. طول عمود مشترک دو خط متنافر $d' : x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$ و $d: x = \frac{y}{2} = z$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۲) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۳۸. مساحت متوازی‌الاضلاع بنا شده بر دو بردار $3a + 2b$ و $2a - b$ چند برابر مساحت مثلث بنا شده بر دو بردار a, b می‌باشد؟

۱) 7 ۲) 9 ۳) 10 ۴) 14

۳۹. اگر خط $\frac{z-۲}{-۲}=\frac{y+۱}{۳}=\frac{x-۱}{۲}$ در صفحهٔ $x+by+۲z=c$ قرار داشته باشد، $\frac{c}{b}$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۶٫۵ ۳) ۱۱ ۴) ۵٫۵

۴۰. نقطهٔ A واقع بر خط $D:\begin{cases}x=t\\y=t\\z=۲t+۱\end{cases}$ بوده و از صفحهٔ $۲x-y+۲z=۶$ به فاصلهٔ ۲ است. طول مثبت نقطهٔ A کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱.گزینه ۲

$$\left.\begin{array}{l} a=(2,1,-1)\\ b=(1,2,2)\\ c=(0,-3,-5)\end{array}\right\}\Rightarrow (b\times c)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & -3 & -5\end{vmatrix}=(-4,5,-3)\Rightarrow a\cdot(b\times c)=(2,1,-1)\cdot(-4,5,-3)=0$$

پس ۳ بردار a و b و c هم صفحه‌اند. بنابراین تنها ۲ بردار به طول ۲ بر این صفحه عمود است.

-سخت

۲.گزینه ۱

روش اول:

$$A(-1,2,0)\qquad B(3,-a,0),\vec{V}=(1,2,-1),\vec{V'}=(2,-1,2)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{V}\times\vec{V'})=0\Rightarrow\begin{vmatrix}4 & -a-2 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow 12-4(-a-2)=0\Rightarrow 4a=-20\Rightarrow a=-5$$

روش دوم: یک نقطه از خط اول را به صورت پارامتری در نظر می گیریم.

$$A(2t-1,-t+2,2t)$$

این نقطه باید در خط دیگری صدق کند و یک مقدار واحد برای t بدست آید:

$$\frac{2t-1-3}{1}=\frac{-t+2+a}{2}=-2t$$

$$\frac{2t-4}{1}=-2t\Rightarrow 2t-4=-2t\Rightarrow 4t=4\Rightarrow t=1$$

این مقدار t را در معادله دیگر قرار می دهیم:

$$\frac{-1+2+a}{2}=-2\Rightarrow a+1=-4\Rightarrow a=-5$$

-سخت

۳.گزینه ۳ ابتدا خط d را پارامتری کرده و نقطه M را به‌صورت شناور برحسب t روی آن انتخاب می‌کنیم:

$$d:\begin{cases}x=2z+3\\ y=0\end{cases}\Rightarrow d:\begin{cases}x=2t+3\\ y=0\\ z=t\end{cases}\Rightarrow M=(2t+3,0,t)$$

$$P \text{ تا صفحه } M \text{ فاصله نقطه }=\frac{|4t+6+0-t|}{\sqrt{4+4+1}}=5\Rightarrow|3t+6|=15$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3t+6=15\Rightarrow 3t=9\Rightarrow t=3\Rightarrow M=(9,0,3)\\ 3t+6=-15\Rightarrow 3t=-21\Rightarrow t=-7\Rightarrow M=(-11,0,-7)\end{cases}$$

-سخت

۴.گزینه ۴

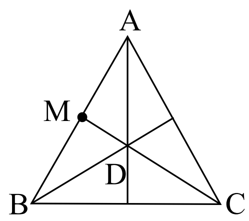
$$|V_1|=|V_2|\Rightarrow\sqrt{4+(a+1)^2+16}=\sqrt{a^2+16+9}\Rightarrow a=2$$

$$\cos\theta=\frac{V_1\cdot V_2}{|V_1|\ |V_2|}=\frac{4+12+12}{\sqrt{4+9+16}\sqrt{4+16+9}}=\frac{28}{29}$$

-آسان

۵.گزینه ۱

درحالت کلي در مثلث متساوي الاضلاع محل تلاقي عمود منصف‌ها همان محل تلاقي ارتفاع‌ها، میانه ها و نیمساز هاست.



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=۲\overrightarrow{DM}\\ \overrightarrow{DC}=-۲\overrightarrow{DM}\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{O}$$

-متوسط

۶.گزینه ۲

$$a'=\frac{a\cdot b}{|b|^۲}b=\frac{-۱+۱+۲}{۳}\times(۱,۱,۱)=(\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})$$

$$\Rightarrow |a'|=\sqrt{\frac{۴}{۹}+\frac{۴}{۹}+\frac{۴}{۹}}=\sqrt{\frac{۴}{۳}}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

یا $|a'|=\frac{|a\cdot b|}{|b|}=\frac{|-۱+۱+۲|}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

-آسان

۷.گزینه ۳   خط d را پارامتری کرده و نقطه A را برحسب t بصورت شناور روی آن انتخاب می‌کنیم:

$$d:x-۱=۱-y=z=t\Rightarrow d:\begin{cases}x=t+۱\\ y=۱-t\\ z=t\end{cases}\Rightarrow A(t+۱,۱-t,t)\quad,\quad M(-۱,۱,۰)$$

فاصله نقطه A را از M مساوی ۲ قرار می‌دهیم:

$$|AM|=۲\Rightarrow\sqrt{(t+۲)^۲+t^۲+t^۲}=۲$$

$$\Rightarrow ۳t^۲+۴t=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۰\\ t=\frac{-۴}{۳}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(۱,۱,۰)\Rightarrow x=۱\\ A(\frac{-۱}{۳},\frac{۷}{۳},\frac{-۴}{۳})\Rightarrow x=\frac{-۱}{۳}\end{cases}$$

-متوسط

۸.گزینه ۳   خط d موازی محور x ها می باشد در نتیجه بر صفحه yoz عمود است بنابراین تصویر خط d روی این صفحه یک نقطه است،

که این نقطه همان محل برخورد خط داده شده با صفحه yoz است یعنی نقطه‌ای به مختصات (۲ و ۱ و ۰)

-سخت

۹.گزینه ۴

کافی است بردارهای $V_۱$ و $V_۲$ را در هم ضرب خارجی کنیم تا بردار نرمال صفحه P حاصل شود:

$$\left.\begin{array}{l}P||\overrightarrow{V_۱}\Rightarrow\overrightarrow{NP}\perp\overrightarrow{V_۱}\\ P||\overrightarrow{V_۲}\Rightarrow\overrightarrow{NP}\perp\overrightarrow{V_۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{V_۱}\times\overrightarrow{V_۲}=\begin{vmatrix}۳ & ۱ & -۱\\ ۱ & -۲ & ۱\end{vmatrix}$$

$$=(-۱,-۴,,-۷)\xrightarrow{\times -۱}\overrightarrow{nP}=(۱,۴,۷)$$

$$A(۳,۴,-۵)\in P\Rightarrow P:x+۴y+۷z=-۱۶$$

-آسان

۱۰.گزینه ۲

ابتدا یک نقطه از خط d استخراج می‌کنیم:

$$d:\begin{cases}۲x=۱\\ ۲y+z=-۱\end{cases}$$

$$N\in d\Rightarrow N(\frac{۱}{۲},۰,-۱)$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}=(-\frac{۱}{۲},۱,-۲)\\ \overrightarrow{ud}=(۰,\frac{۱}{۲},-۱)\overset{\times ۲}{\Rightarrow}\overrightarrow{ud}=(۰,۱,-۲)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{ud}=\begin{vmatrix}-\frac{۱}{۲} & ۱ & -۲\\ ۰ & ۱ & -۲\end{vmatrix}=(۰,-۱,-\frac{۱}{۲})$$

$$L=\frac{|\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{ud}|}{|\overrightarrow{ud}|}=\frac{\sqrt{۱+\frac{۱}{۴}}}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{\frac{۵}{۴}}}{\sqrt{۵}}=\sqrt{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

-آسان

۱۱.گزینه ۱

$$ud=(۰,۱,۰)$$

$$ud'=(۱,\frac{۱}{۲},۴)\overset{\times ۲}{\Rightarrow}ud'=(۲,۱,۸)$$

$$\cos\theta=\frac{ud\cdot ud'}{|ud|\,|ud'|}=\frac{۱}{۱\times\sqrt{۶۹}}=\frac{۱}{\sqrt{۶۹}}$$

-متوسط

۱۲.گزینه ۳

$$a\times b=a\times c\Rightarrow a\times b-a\times c=\overset{\rightarrow}{۰}\Rightarrow a\times(b-c)=\overset{\rightarrow}{۰}\Rightarrow a\parallel(b-c)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b-c=(\alpha-۲)i+(۱-\beta)j+۲k\\ a=i+۲j+k\end{cases}\Rightarrow\frac{۱}{\alpha-۲}=\frac{۲}{۱-\beta}=\frac{۱}{۲}$$

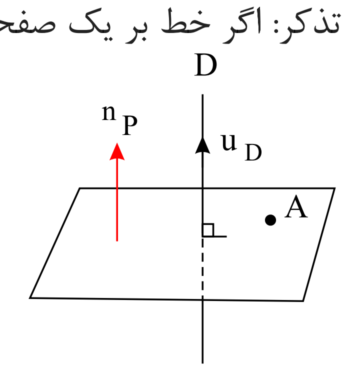
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=۴\\ \beta=-۳\end{cases}\Rightarrow\alpha+\beta=۱$$

-متوسط

۱۳.گزینه ۴

تذکر: اگر خط بر یک صفحه عمود باشد بردار هادی خط همان بردار نرمال صفحه می‌باشد و برعکس.

$$\left.\begin{array}{l}ud=\overrightarrow{np}=(۱,\frac{-۱}{۲},\frac{۱}{۲})\overset{\times ۲}{=}(۲,-۱,۱)\\ A=(۱,۲,-۱)\in P\end{array}\right\}\Rightarrow P:۲x-y+z=-۱$$



-آسان

۱۴.گزینه ۴ مختصات x و z بردار هادی این خط باید برابر باشند تا خط با دو محور ox و oz زاویه مساوی بسازد.

$$ud=(۲a,\frac{۱}{۲},a+۱)\Rightarrow ۲a=a+۱\Rightarrow a=۱$$

-آسان

۱۵.گزینه ۱

چون فاصله همه نقاط خط d از صفحه P مقدار ثابتی است پس خط d با صفحه P موازی است پس:

۱) خط d موازی صفحه P است $\Rightarrow \overrightarrow{nP}\cdot\overrightarrow{ud}=0 \Rightarrow (3,1,-1)\cdot(1,n,3)=0 \Rightarrow 3+n-3=0 \Rightarrow n=0$

۲) برای پیدا کردن خط d تا صفحه P کافی است فاصله‌ی نقطه‌ای دلخواه از خط را تا صفحه P بیابیم. $A(-m,2,0)\in d$

فاصله A تا صفحه P $=1 \Rightarrow \dfrac{|-3m+2-0-2|}{\sqrt{9+1+1}}=1 \Rightarrow |3m|=\sqrt{11} \Rightarrow 3m=\pm\sqrt{11} \Rightarrow \begin{cases} m=\dfrac{\sqrt{11}}{3} \\ m=\dfrac{-\sqrt{11}}{3}\end{cases}$

$m+n=\dfrac{\sqrt{11}}{3}+0$ یا $m+n=\dfrac{-\sqrt{11}}{3}$

-متوسط

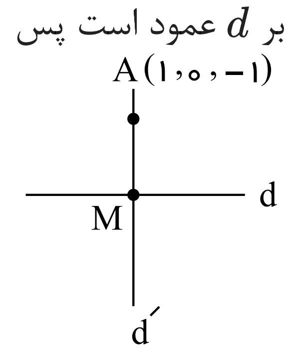
۱۶.گزینه ۳

$$D:\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y=4\end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} x=2 \\ y=1\end{cases} \quad B\in D \Rightarrow B(2,1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,2,-2) \\ \overrightarrow{ud}=(0,0,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{ud}=(2,-1,0) \Rightarrow \ L=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ud}\right|}{\left|\overrightarrow{ud}\right|}=\frac{\sqrt{5}}{1}=\sqrt{5}$$

-سخت

۱۷.گزینه ۲ ابتدا خط d را پارامتری کرده و M را بر حسب t روی آن تعیین می کنیم سپس بردار AM را می سازیم این بردار بر d عمود است پس $AM\cdot u_d=0$ که از اینجا t بدست می آید بردار AM همان بردار هادی خط d' می باشد.

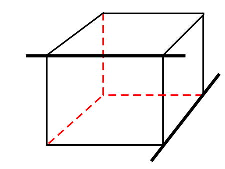


$$d: x-1=y+1=z \Rightarrow u_d(1,1,1)$$

$$d: x-1=y+1=z=t \Rightarrow d:\begin{cases} x=t+1 \\ y=t-1 \\ z=t\end{cases} \Rightarrow M(t+1,t-1,t) \Rightarrow \overrightarrow{AM}$$
$$=(t,t-1,t+1)$$
$$\overrightarrow{AM}\perp d \Rightarrow \overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{ud} \Rightarrow \overrightarrow{ud}\cdot\overrightarrow{AM}=0 \Rightarrow t+t-1+t+1=0 \Rightarrow t=0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(0,-1,1)=u_{d'}$$
$$A\in d' \Rightarrow d':\frac{x-1}{0}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z+1}{1} \Rightarrow d':\begin{cases} x=1 \\ \dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}\end{cases} \Rightarrow y+z=-1$$

-سخت

۱۸.گزینه ۳ چون دو خط داده شده موازی و متقاطع نیستند، لذا دو یال متنافر مکعب را تشکیل می‌دهند، لذا طول عمودمشترک این دو خط متنافر برابر یال مکعب می‌باشد.طول عمود مشترک را از رابطه‌ی بدست می‌آوریم که در آن A و B دو نقطه دلخواه از دو خط D و D' و u و u' بردارهای هادی دو خط هستند (درواقع از یکی از خطوط صفحه‌ای به موازات خط دیگر رسم می‌کنیم و سپس فاصله‌ی خط دوم را از صفحه‌ی بدست آمده، به‌دست می‌آوریم)



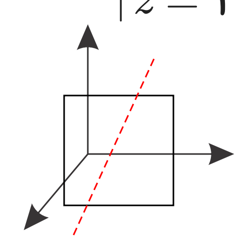
$$\begin{cases} A\in D \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۲\\۲\\۱\end{matrix}\right. \\ B\in D' \Rightarrow B\left|\begin{matrix}۲\\۰\\۱\end{matrix}\right. \end{cases} \Rightarrow \overline{AB}\left|\begin{matrix}۰\\-۲\\۰\end{matrix}\right. , \vec{u}\times\vec{u}' = \begin{vmatrix} i & j & k\\ ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & -۱\end{vmatrix} = j+k$$

$$\text{طول} = \text{طول عمود مشترک} = \frac{\left|\overline{AB}\cdot(\vec{u}\times\vec{u}')\right|}{\left|\vec{u}\times\vec{u}'\right|} = \frac{|-۲|}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲} \Rightarrow \text{مساحت کل} = ۶a^۲ = ۶(\sqrt{۲})^۲ = ۱۲$$

یال مکعب

راه‌حل دیگر: چون یکی از خطوط موازی محور xها و خط دوم موازی صفحه‌ی yoz است، لذا می‌توان این پرسش را از راه دیگری نیز حل کرد.

نقطه‌ی تقاطع خط $\begin{cases} y=۲\\ x=۱\end{cases}$ با صفحه‌ی $x=۲$ ، نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۲\\۲\\۱\end{matrix}\right.$ است. کافی است داخل صفحه‌ی $x=۲$، فاصله‌ی نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}y=۲\\ z=۱\end{matrix}\right.$ را از خط $y=۱-z$ به‌صورت دو بعدی بیابیم:

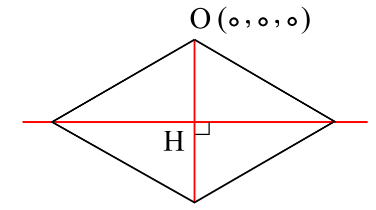


$$y+z-۱=۰ \Rightarrow \textbf{فاصله} = \frac{|۲+۱-۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

تذکر: اگر معادله‌ی عمود مشترک نیز خواسته می‌شد، به همین صورت می‌توانستیم خط عمود از این نقطه بر خط $y=۱-z$ را نوشته و در آخر صفحه‌ی $x=۲$ را به معادله‌ی خط اضافه کنیم تا معلوم شود معادله‌ی به‌دست آمده، خطی داخل صفحه‌ی $x=۲$ است.

-متوسط

۱۹.گزینه ۱ چون اقطار لوزی عمود منصف یکدیگرند، لذا برای یافتن مرکز لوزی که محل تلاقی اقطار است. باید تصویر نقطه‌ی O را بر خط داده شده بیابیم. برای این منظور ابتدا نقطه‌ای شناور (پارامتری) روی خط در نظر می‌گیریم:



$$d: \frac{x-۱}{۲} = y+۳ = \frac{z+۴}{۲} = t \Rightarrow H(۲t+۱\,,\,t-۳\,,\,۲t-۴)\in d$$

حال شرط تعامد پاره‌خط OH بر خط داده شده را کنترل می‌کنیم، تا تصویر نقطه به دست آید:

$$OH\perp d \Rightarrow \overrightarrow{OH}\cdot\vec{u}=۰ \Rightarrow ۴t+۲+t-۳+۴t-۸=۰ \Rightarrow t=۱ \Rightarrow H(۳\,,\,-۲\,,\,-۲)$$

پای عمود در واقع همان مرکز لوزی است.

-سخت

۲۰.گزینه ۴ برای آن‌که دو خط برهم عمود باشند، باید بردار هادی دو خط برهم عمود باشند. برای آن‌که بردار هادی خط d' را به دست آوریم، معادله‌ی خط d' را به صورت متقارن می‌نویسیم (برای این منظور کافی است مولفه y را در دو معادله تنها کنیم):

$$d':\begin{cases} y=x+۲\\ y=۱-z\end{cases} \Rightarrow d': x+۲=y=\frac{z-۱}{-۱} \qquad d: x=\frac{y}{\frac{۱}{m}}=\frac{z}{۲}$$

برای یافتن هادی خط هنگامی که ضرایب متغیرها یک است، مخرج آن‌ها را می‌خوانیم:

$$u_d=(۱\,,\,\frac{۱}{m}\,,\,۲) \qquad u_{d'}=(۱\,,\,۱\,,\,-۱)$$

شرط عمود بودن:

$$u_d\cdot u_{d'}=۰ \Rightarrow ۱+\frac{۱}{m}-۲=۰ \Rightarrow \frac{۱}{m}=۱ \Rightarrow m=۱$$

-متوسط

۲۱.گزینه ۲

برای هر دو بردار دلخواه a و b داریم:

$$|a\times b|^{۲}+(a\cdot b)^{۲}=|a|^{۲}|b|^{۲}$$
$$۲۵۶+۱۴۴=۲۵|a|^{۲}\Rightarrow |a|^{۲}=۱۶\Rightarrow |a|=۴$$

-متوسط

۲۲.گزینه ۲

$$a\cdot c=۳\Rightarrow |a||c|cos۶۰^{\circ}=۳\Rightarrow |a|\times ۳\times \frac{۱}{۲}=۳\Rightarrow |a|=۲$$

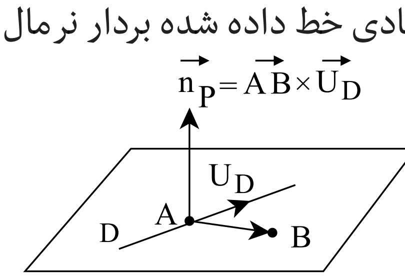
$$a+۲b+۲c=۰\xrightarrow{\text{طرفین در } \vec{a} \text{ ضرب داخلی}} a\cdot a+۲a\cdot b+۲a\cdot c=a\cdot o\Rightarrow |a|^{۲}+۲a\cdot b+۲a\cdot c=o$$

$$\Rightarrow ۴+۲a\cdot b+۶=۰\Rightarrow a\cdot b=-۵$$

-متوسط

۲۳.گزینه ۴

اگر $B(۰,۳,۰)$ باشد آن‌گاه نقطه‌ی A از خط $d:\dfrac{x+۱}{۲}=\dfrac{y}{۳}=\dfrac{z-۲}{-۱}$ را انتخاب می‌کنیم حاصلضرب خارجی $\overrightarrow{AB}$ در هادی خط داده شده بردار نرمال صفحه مطلوب است.



$$A\in d\Rightarrow A=(-۱,۰,۲)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(۱,۳,-۲)\quad ,\quad \vec{U}=(۲,۳,-۱)$$

$$\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{UD}=\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & -۲ \\ ۲ & ۳ & -۱ \end{vmatrix}=(۳,-۳,-۳) \text{ یا } \overrightarrow{nP}=(۱,-۱,-۱)$$

$$B\in P\Rightarrow P:۱(x-۰)-۱(y-۳)-۱(z-۰)=۰\Rightarrow P:x-y-z+۳=۰$$

$$\xrightarrow[x,y=۰]{\text{برخورد با محور}z\text{ها}} z=۳$$

-متوسط

۲۴.گزینه ۲ می‌دانیم $c\times a$ بر a عمود است. پس $a\cdot(c\times a)=۰$ حال دو طرف رابطه‌ی $b+ea=c\times a$ را در a ضرب داخلی می‌کنیم.

$$a\cdot(b+ea)=a\cdot(c\times a)=۰\Rightarrow a\cdot b+a\cdot ea=۰\Rightarrow |a||b|\cos\theta+|a||ea|\cos ۰=۰$$

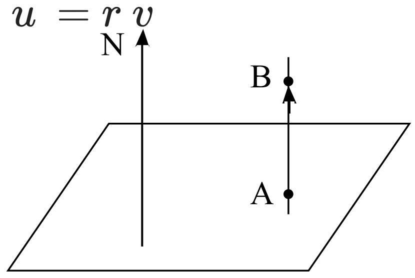
$$\Rightarrow |a||b|\cos\theta+|a|=۰\Rightarrow |a|(|b|cos\theta+۱)=۰\xrightarrow{|a|\neq ۰}\cos\theta=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow \theta=۱۲۰^{\circ}$$

تذکر: بردار ea، بردار یکه است و در نتیجه $|ea|=۱$

-سخت

۲۵.گزینه ۴ نکته: دو بردار $\vec{u}$, $\vec{v}$ موازی‌اند. هرگاه عدد حقیقی غیرصفر r موجود باشد به طوریکه:

$$\vec{u}=r\vec{v}$$



باید بردار نرمال صفحه و بردار هادی خط، یعنی بردار $\overrightarrow{AB}$ با هم موازی باشند.

$$\overrightarrow{AB}=(-۱,۳,-۶)$$

در بین گزینه‌ها فقط صفحه‌ی $x-۳y+۶z=۵$ دارای این ویژگی است.

$$(۱,-۳,۶)||(-۱,۳,-۶)$$

-آسان

۲۶.گزینه ۳ نکته: اگر بردار $a+b$ نیمساز دو بردار b,a باشد، آنگاه:

$$|a|=|b| \Leftrightarrow \text{بردار نیمساز } (a+b)$$

$$|a|=|b| \Rightarrow \sqrt{16+9+m^2}=\sqrt{4+16+(m+1)^2} \Rightarrow 25+m^2=20+(m^2+2m+1) \Rightarrow m=2$$

-متوسط

۲۷.گزینه ۳ نکته ۱: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار در فضا باشند مساحت مثلث ساخته شده روی بردارهای $\vec{a}\times\vec{b}$ از دستور $\frac{1}{2}|a\times b|$ بدست می‌آید.

$2)\vec{a}\times\vec{a}=\vec{o}$

$3)\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

$4)\ |a\times b|=|a|\,|b|\sin\alpha$

در این تست داریم:

$$s=\frac{1}{2}|(4a+3b)\times(2a-5b)|=\frac{1}{2}|8a\times a-20a\times b+6b\times a-15b\times b|$$

$$=\frac{1}{2}|20b\times a+6b\times a|=\frac{1}{2}|26b\times a|=13|b|a|\sin 30=13\times 1\times 1\times\frac{1}{2}=6/5$$

-متوسط

۲۸.گزینه ۳ تذکر: اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$ باشد آنگاه به شرط آنکه $\vec{b}\neq\vec{o},\vec{a}\neq\vec{o}$ نتیجه می شود $\vec{a}||\vec{b}$

$$a\times b=a\times c\to a\times b-a\times c=\vec{o}\Rightarrow a\times(b-c)=\bar{o}\to a||(b-c)$$

-متوسط

۲۹.گزینه ۱ برای به‌دست آوردن بردار نرمال صفحه‌ی p کافی است بردارهای هادی دو خط d و d' را درهم ضرب خارجی کنیم.

$$\begin{matrix} u_d=(1,1,-1) \\ u_{d'}=(3,1,2)\end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{nP}=u_d\times u_{d'}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=(3,-5,-2)$$

از طرفی هر نقطه از خط d می‌تواند نقطه‌ای از صفحه‌ی p باشد پس $A=(0,1,1)$ یک نقطه از خط d و از آن‌جا یک نقطه از صفحه‌ی p خواهد بود. پس:

$$p:3x-5y-2z=-5-2\Rightarrow p:3x-5y-2z=-7$$

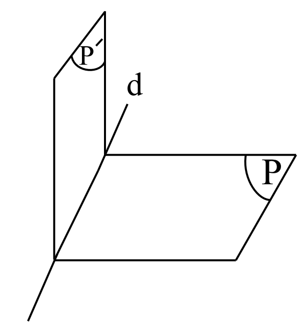
حال مختصات نقطه‌ی $(m,2m,0)$ را در معادله این صفحه صدق می‌دهیم.

$$(m,2m,0)\in p \xrightarrow{\text{صدق}} 3m-10m=-7\Rightarrow m=1$$

-متوسط

۳۰.گزینه ۳ نکته: دو صفحه‌ی متقاطع p و p' را در نظر می‌گیریم فصل مشترک این دو صفحه خطی است که در محل تقاطع این دو خط ایجاد می‌شود. بردار هادی این خط از ضرب خارجی بردارهای نرمال صفحات p و p' حاصل می‌شود.
$(u_d=nP\times np')$ برای تعیین یک نقطه از خط d معادلات دو صفحه را در یک دستگاه نوشته به یکی از متغیرهای x و y یا z عدد دلخواهی می‌دهیم.

$$d:\begin{cases} x+y+z=-۱ \\ x-y+z=۱ \end{cases} \Rightarrow ud = nP \times nP' = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{pmatrix} = (۲,۰,-۲)$$



$$\xrightarrow{x=۰} \begin{cases} y+z=-۱ \\ -y+z=۱ \end{cases} \xrightarrow{+} z=۰ \Rightarrow y=-۱ \Rightarrow A(۰,-۱,۰)\in d$$

$$\Rightarrow d:\begin{cases} \dfrac{x}{۲}=\dfrac{z}{-۲} \\ y=-۱ \end{cases} \Rightarrow d:\begin{cases} x=t \\ y=-۱ \\ z=t \end{cases} \Rightarrow M(t,-۱,t)$$ مختصات همه‌ی نقاط d:

$$|MP|=|MP'| \Rightarrow \frac{|t-۲-۲t+۳|}{\sqrt{۱+۴+۴}} = \frac{|t-۲+۲t+۷|}{\sqrt{۱+۴+۴}} \Rightarrow t=۳ \Rightarrow M(۳,-۱,۳)$$

-سخت

۳۱.گزینه ۲   نکته: $a\times a=۰$ و $a\times b=-b\times a$

$$|(۳a-b)\times(۴a+b)| = |\overset{۰}{\cancel{۱۲a\times a}} + ۳a\times b - ۴b\times a - \overset{۰}{\cancel{b\times b}}| = |۳a\times b+۴a\times b|$$

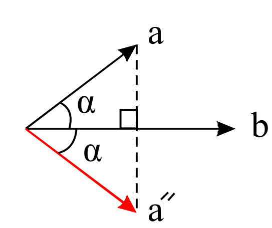
$$= |۷a\times b| = ۷\,|a\times b| \xlongequal{|a\times b|=۳} ۷\times ۳ = ۲۱$$

-آسان

۳۲.گزینه ۲

تذکر: اگر قرینه بردار $\vec{a}$ نسبت‌به بردار $\vec{b}$ باشد آنگاه $\vec{a''}$ $|\vec{a''}|=|\vec{a}|$ و زاویه‌ی بین بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{a}$ برابراست با زاویه بین بردارهای b و a''

$$|\vec{a''}|=|\vec{a}|=۴ \text{ و } |\vec{b}|=۳$$



$$۲\alpha \xlongequal{\text{زاویه بین } a'',a} ۱۲۰ \Rightarrow \alpha = ۶۰^\circ$$

$$|a-۲b|^۲ = |\vec{a}^۲| + ۴|b|^۲ - ۴\,|a||b|\cos\alpha = ۱۶+۳۶-۴(۴)(۳)\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۲۸$$

$$\to |a-۲b| = \sqrt{۲۸} = ۲\sqrt{۷}$$

-متوسط

۳۳.گزینه ۱   نکته: برای تعیین قرینهٔ یک نقطه نسبت به یک محور یا یکی از صفحات مختصات مؤلفه‌های مرتبط با آن محور یا صفحه را ثابت نگه داشته و مؤلفه‌های غیر مرتبط را قرینه می‌کنیم.

$$A(x,y,z) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به صفحهٔ } xy} B(x,y,-z)$$

$$A(x,y,z) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} C(x,-y,-z)$$

$$|BC|=۱۰ \Rightarrow \sqrt{(۲y)^۲}=۱۰ \Rightarrow |۲y|=۱۰ \Rightarrow |y|=۵ \Rightarrow$$ فاصلهٔ A از صفحهٔ xz $=۵$

-متوسط

۳۴.گزینه ۴   این خط از مبدأ گذشته و بردار هادی آن بردار $u(۰,۱,۱)$ می‌تواند باشد پس:

$$0(0,0,0) \in \Delta \Rightarrow \Delta : \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow \Delta : \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$P_0\,(0,0,0) \in \Delta \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{P_0 P} = (2,m,1) \\ u = (0,1,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{P_0 P} \times u = (m-1,-2,2)$$

$$\Rightarrow \text{فاصلهٔ } P \text{ از } \Delta = \frac{\left|\overrightarrow{P_0 P} \times u\right|}{|u|} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{(m-1)^2+4+4}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow (m-1)^2 + 8 = 24 \Rightarrow (m-1)^2 = 16 \Rightarrow m-1 = \pm 4 \xrightarrow{m>0} m = 5$$

-سخت

۳۵.گزینه ۴

نکته: : $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

نکته: : $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

نکته: : $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$$(2\vec{a} - 3\vec{b}) \times (4\vec{a} + \vec{b}) = 8\vec{a} \times \vec{a} + 2\vec{a} \times \vec{b} - 12\vec{b} \times \vec{a} - 3\vec{b} \times \vec{b}$$

$$= 0 + 2\vec{a} \times \vec{b} + 12\vec{a} \times \vec{b} - 0 = 14\vec{a} \times \vec{b}$$

-آسان

۳۶.گزینه ۲ نکته: اگر a و b دو بردار دلخواه در فضا باشند:

۱) $|a \times b| = |a|\,|b| \sin\alpha$

۲) $|a \times a| = 0$

۳) $a \times b = -b \times a$

نکته: مساحت مثلث ساخته‌شده روی دو بردار a و b برابر: $\frac{1}{2}|a \times b|$ می‌باشد.

مساحت مثلث ساخته‌شده روی بردارهای $2a + 3b$ و $3a - 2b$

$$= \frac{1}{2}|(2a+3b) \times (3a-2b)| = \frac{1}{2}\left|\cancel{6\overset{0}{a \times a}} - 4a \times b + 9\underbrace{b \times a}_{-a\times b} - \cancel{6\overset{0}{b \times b}}\right|$$

$$= \frac{1}{2} 13|a \times b| = \frac{13}{2}|a|\,|b| \sin 150^\circ = \frac{13}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 13$$

-متوسط

۳۷.گزینه ۲ **نکته:** فاصلهٔ دو صفحه‌ی موازی $P : ax + by + cz = d$ و $P' : ax + by + cz = d'$ از دستور $L = \dfrac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ حاصل می‌شود.

روش اوّل: اگر دو خط متنافر روی دو صفحه‌ی موازی واقع باشند، فاصلهٔ دو صفحه همان طول عمود مشترک دو خط است.
به سادگی می‌توان **۲** صفحهٔ موازی پیدا کرد که دو خط روی آن‌ها واقع هستند:

$$d: x=\frac{y}{۲}=z \xrightarrow{\text{صفحه‌ای شامل } d} x=\frac{y}{۲} \Rightarrow P: ۲x-y=۰$$

$$d': x-۱=\frac{y}{۲}=\frac{z-۱}{۲} \xrightarrow{\text{صفحه‌ای شامل } d'} ۲x-۲=y \Rightarrow P': ۲x-y=۲$$

$$\Rightarrow \text{فاصله } d \text{ و } d' = \frac{|۲-۰|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

روش دوم: **نکته:** طول عمود مشترک در خط متنافر d و d' از دستور $L=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot(u_d\times u_{d'})\right|}{|u_d\times u_{d'}|}$ حاصل می‌شود.

$$\begin{matrix} A\in d \to A=(۰,۰,۰) \\ B\in d' \to B=(۱,۰,۱) \end{matrix} \to \overrightarrow{AB}(۱,۰,۱)$$

$$u_d\times u_{d'}=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{pmatrix}=(۲,-۱,۰)$$

$$L=\frac{|۲+۰+۰|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

-متوسط

۳۸.گزینه ۴ نکته: مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع بنا شده بر دو بردار u و v به ترتیب برابر $\frac{۱}{۲}|u\times v|$ و $|u\times v|$ است.

نکته: $u\times v=-v\times u, u\times u=o$

$$(\text{مساحت متوازی‌الاضلاع})\ S_۱=|(۳a+۲b)\times(۲a-b)|$$

$$=|۶a\times a-۳a\times b+۴b\times a-۲b\times b|=|۳b\times a+۴b\times a|=۷|a\times b|$$

$$(\text{مساحت مثلث})\ S_۲=\frac{۱}{۲}|a\times b|$$

بنابراین: $\dfrac{S_۱}{S_۲}=\dfrac{۷|a\times b|}{\frac{۱}{۲}|a\times b|}=۱۴$

-آسان

۳۹.گزینه ۲ نکته: اگر خط D با بردار هادی u درون صفحهٔ p با بردار نرمال n قرار داشته باشد:

$$\text{خط درون صفحه قرار دارد} \Rightarrow \begin{cases} u\cdot n=۰ \\ \text{هر نقطه‌ای از خط در صفحه هم صدق می‌کند.} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} n=(۱,b,۲) \\ u=(۲,۳,-۲) \end{matrix}\right\} \Rightarrow u\cdot n=۰ \Rightarrow ۲+۳b-۴=۰ \Rightarrow b=\frac{۲}{۳}$$

$$A\left|\begin{matrix} ۱ \\ -۱ \\ ۲ \end{matrix}\right. \in D \xrightarrow[\text{صدق می‌کند}]{A \text{ در صفحه}} ۱+b(-۱)+۲(۲)=c$$

$$\Rightarrow ۱-\frac{۲}{۳}+۴=c \Rightarrow c=\frac{۱۳}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b}=\frac{۱۳}{۲}=۶/۵$$

-متوسط

۴۰.گزینه ۲ نکته: فاصلهٔ نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ از صفحهٔ $ax+by+cz+d=\circ$ برابر است با:

$$\frac{|ax_\circ+by_\circ+cz_\circ+d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$$

معادلهٔ خط D به‌صورت پارامتری است. پس نقطهٔ A را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$D:\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=۲t+۱ \end{cases} \Rightarrow A(t,t,۲t+۱)$$

طبق فرض فاصلهٔ نقطهٔ A تا صفحهٔ داده‌شده برابر **۲** است. پس مطابق نکته داریم:

$$AH=۲ \Rightarrow \frac{|۲t-t+۴t+۲-۶|}{\sqrt{۴+۱+۴}}=۲ \Rightarrow \frac{|۵t-۴|}{۳}=۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۵t-۴=۶ \Rightarrow t=۲ \Rightarrow A(۲,۲,۵) \\ ۵t-۴=-۶ \Rightarrow t=\frac{-۲}{۵} \Rightarrow A(\frac{-۲}{۵},\frac{-۲}{۵},\frac{۱}{۵}) \end{cases}$$

بنابراین طول مثبت نقطهٔ A برابر **۲** است.

-متوسط

پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۹۱۲۷۲۸

۱- ۲	۲- ۱	۳- ۳	۴- ۴	۵- ۱
۶- ۲	۷- ۳	۸- ۳	۹- ۴	۱۰- ۲
۱۱- ۱	۱۲- ۳	۱۳- ۴	۱۴- ۴	۱۵- ۱
۱۶- ۳	۱۷- ۲	۱۸- ۳	۱۹- ۱	۲۰- ۴
۲۱- ۲	۲۲- ۲	۲۳- ۴	۲۴- ۲	۲۵- ۴
۲۶- ۳	۲۷- ۳	۲۸- ۳	۲۹- ۱	۳۰- ۳
۳۱- ۲	۳۲- ۲	۳۳- ۱	۳۴- ۴	۳۵- ۴
۳۶- ۲	۳۷- ۲	۳۸- ۴	۳۹- ۲	۴۰- ۲