

۱. باقیمانده  $3^{1388}$  بر  $110$  کدام است؟

- (۱) ۳۹ (۲) ۵ (۳) ۷۱ (۴) ۱۰۵

۲. اگر باقیمانده تقسیم  $a$  بر  $13$  و  $18$  به ترتیب  $5$  و  $7$  باشد، باقیمانده تقسیم  $a$  بر  $117$  کدام است؟

- (۱) ۴۷ (۲) ۷۰ (۳) ۵۷ (۴) ۶۰

۳. در گرافی به درجه رئوس  $\{7, 7, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2\}$  که دو رأس با درجه  $7$  مجاور نیستند چند دور وجود دارد؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۴ (۳) ۲۱ (۴) ۲۸

۴. در تقسیم عدد طبیعی  $a$  بر  $37$  باقیمانده تقسیم از مربع خارج قسمت آن  $2$  واحد کمتر است. بزرگترین مقدار  $a$  مضرب کدام عدد است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

۵. باقیمانده عدد  $3^{48}$  بر  $11$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۶. در گراف  $G$  با درجه رأس های  $3, 3, 2, 2, 2$  دو رأس با مکسیمم درجه، غیر مجاورند. تعداد دورهای باطول  $4$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۰

۷. به ازای کدام مقدار  $n$ ، معادله‌ی سیاله  $60x + 84y = 5n - 1$  در مجموعه‌ی  $\mathbb{Z}$  دارای جواب است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۹ (۳) ۳۳ (۴) ۳۵

۸. باقی مانده تقسیم  $(4334)^{33} + (3443)^{44}$  بر عدد  $8$  کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۵ (۴) ۷

۹. باقی مانده تقسیم عدد  $6 - 2^{10n-1} + 5^{6n-1}$  بر عدد  $31$  کدام است؟ (  $n$  عدد طبیعی)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰. باقی مانده تقسیم  $231^{57}$  بر  $81^{14}$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۰

۱۱. رقم یکان  $4^{n^3-n}$  برای هر  $n > 1$  طبیعی کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۲. رقم یکان عدد  $119^{199}$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۹ (۳) ۵ (۴) ۷



۱۳. مجموعه  $A = \{n \in \mathbb{N} : 2^n + 1 \mid 2^9 + 1\}$  چند عضو دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی شمار

۱۴. باقی مانده تقسیم عبارت  $A = 50^7 + 51^7 + 52^7 + 53^7 + 54^7 + 55^7$  بر عدد ۷ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۵. کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟  $(a, b, c \in \mathbb{Z})$

- (۱)  $a \mid c$  یا  $a \mid bc \Rightarrow a \mid b$  (۲)  $a \mid b + c \Rightarrow a \mid b$  یا  $a \mid c$   
(۳)  $a \mid c$  یا  $a \mid b - c \Rightarrow a \mid b$  (۴)  $a \mid b \Rightarrow a^2 \mid b^3$

۱۶. می‌خواهیم گرافی از مرتبه ۱۷ چنان رسم کنیم که همبند باشد. حداقل اندازه چقدر می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۱۶ (۳) ۱۵ (۴) ۵۶

۱۷. گرافی ناهمبند و ۳-منتظم است. مرتبه ی آن کدام یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴) ۶

۱۸. کدام گزینه دارای مثال نقض است؟

- (۱) هر مربع، مستطیل است.  
(۲) بعضی از مستطیل‌ها، متوازی الاضلاع هستند.  
(۳) هیچ متوازی الاضلاعی وجود ندارد که مستطیل باشد. (۴) حداقل یک متوازی الاضلاع می‌توان یافت که مربع باشد.

۱۹. کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت» را نقض می‌کند؟

- (۱) ۵۶ (۲) ۶۴ (۳) ۷۲ (۴) ۷۴

۲۰. یک گراف ساده با ۲۳ یال، حداقل چند رأس دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۲۱. در تقسیم عدد طبیعی  $a$  بر ۱۵، باقی‌مانده برابر ۶ است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد، به طوری که مقسوم‌علیه و خارج‌قسمت تغییر نکند؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۰ (۳) ۹ (۴) ۸

۲۲. خارج قسمت تقسیم ۷۸۷ بر چند عدد طبیعی برابر ۱۰ است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۶

۲۳. بین ۱۰ + ۱۳۹۳! تا ۱۳۹۶ + ۱۳۹۳!، چند عدد اول وجود دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

۲۴. در گراف  $K_8$  با مجموعه ی رئوس  $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ، چند دور به طول ۴ وجود دارد، که شامل رأس  $a$  باشد و شامل رأس  $g$  نباشد؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۰ (۳) ۵۰ (۴) ۶۰



۲۵. در گراف کاملی که حاصل ضرب مرتبه و اندازه آن برابر ۵۰ است، چند مسیر به طول ۳ و شامل رأس  $a$  و فاقد رأس  $b$  وجود دارد؟ (رئوس  $a$  و  $b$  از رأس‌های این گراف هستند.)

- (۱) ۳ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴) ۴۸

۲۶. حاصل ضرب دو عدد به شکل  $۴q + ۳$  و همچنین حاصل ضرب دو عدد به شکل  $۶k + ۵$  به ترتیب از راست به چپ، کدام می‌تواند باشد؟ ( $q, k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $۸۱ - ۱۲۹$  (۲)  $۸۵ - ۱۲۳$  (۳)  $۸۱ - ۱۲۳$  (۴)  $۸۵ - ۱۲۹$

۲۷. در یک تقسیم، به مقسوم، ۱۴ واحد اضافه می‌کنیم. در این صورت به خارج قسمت، ۲ واحد اضافه می‌شود؛ اما مقسوم علیه و باقی‌مانده تغییری نمی‌کنند. مقسوم علیه کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۱۲

۲۸. هرگاه سال نو با روز شنبه آغاز شود، در این سال ۲۰ مهر چه روزی است؟

- (۱) یکشنبه (۲) دوشنبه (۳) شنبه (۴) سه‌شنبه

۲۹. باقی‌مانده‌ی تقسیم  $۳^{۱۰۰}$  بر ۲۱ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۳ (۴) ۱۸

۳۰. از گراف کامل  $K_۵$  یک رأس حذف می‌کنیم. چند یال باقی می‌ماند؟

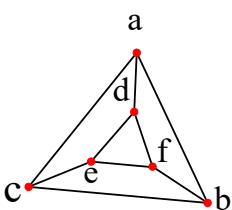
- (۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۴

۳۱. در گراف ساده  $G$ ،  $q = ۱۱$  و  $\delta = ۴$  می‌باشد. چند مقدار متمایز برای  $p$  وجود دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۲. در یک گراف ساده از مرتبه ۴ میانگین درجه رأس‌ها برابر ۲٫۵ می‌باشد. اگر درجات رأس‌های این گراف را به صورت نزولی بنویسیم، کدام دنباله به دست می‌آید؟

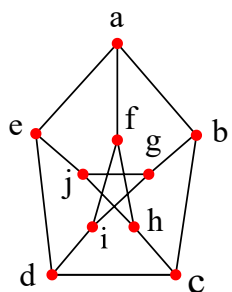
- (۱) ۳, ۳, ۲, ۲ (۲) ۳, ۲, ۲, ۱ (۳) ۳, ۳, ۱, ۱ (۴) ۴, ۴, ۱, ۱



۳۳. در گراف مقابل  $\gamma(G)$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۴. از کدام مجموعه زیر می‌توان رأس‌هایی را حذف کرد و مجموعه همچنان یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف مقابل باشد؟



$$A = \{a, b, c, d, e\} \quad (۱)$$

$$B = \{f, g, h, i, j\} \quad (۲)$$

$$C = \{f, g, h, e\} \quad (۳)$$

$$D = \{f, g, h, e, d\} \quad (۴)$$

۳۵. اگر  $a - b \mid ۲a + b$  کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

- (۱)  $a - b \mid a$  (۲)  $a - b \mid ۴a + ۵b$  (۳)  $a - b \mid ۵a + b$  (۴)  $a - b \mid ۳a - ۳b$



۳۶. اگر  $a^3 b^2 = dc$  آنگاه کدام گزینه ممکن است درست نباشد؟

- (۱)  $c \mid a^3 b^2$  (۲)  $a^2 \mid cd$  (۳)  $b \mid \overline{cd}$  (۴)  $d \mid a^2 b$

۳۷. کدام عدد کلیت حکم «هر عدد به صورت  $6k + 1$  عددی اول است» را نقض می کند؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۶۲ (۳) ۳۶ (۴) ۴۹

۳۸. سه عدد  $a$ ،  $۳۰۱$  و  $۱۵۸$  به پیمانه  $m > ۱$  هم نهشت اند، کوچکترین عدد طبیعی  $a$  به طوری که مجموعه اعداد صحیح به تعداد کم تری دسته هم نهشتی افراز شود کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

۳۹. کدام گزاره درست نیست؟

- (۱)  $[۱۵]_{۱۱} \cap [۱۹]_{۱۱} = \emptyset$  (۲)  $[۳۹]_۸ = [۲۳]_۸$   
(۳)  $[۳]_{۱۰} \cap [۶]_۷ \neq \emptyset$  (۴)  $[۶]_{۱۷} \subseteq [۳]_{۲۱}$

۴۰. از رابطه هم نهشتی  $۲۱b \equiv_{۴۲} ۱۴a$  کدام نتیجه گیری نادرست است؟

- (۱)  $b \equiv_{۶} ۱$  (۲)  $۲a \equiv_{۶} ۳b$   
(۳)  $۳ \mid a$  (۴)  $۲ \mid b$



۱. گزینه ۳ به جای اینکه باقیمانده این عدد را بر ۱۱۰ بباییم، چون  $10 \times 11 = 110$  باقیمانده آن را بر ۱۰ می یابیم.

$$\omega^F \equiv 1 \Rightarrow (\omega^F) \omega^F \gamma \equiv 1, \omega^F \gamma \Rightarrow \omega^1 \omega^3 \omega^4 \equiv 1$$

در بین گزینه ها، گزینه ای جواب است که باقیمانده تقسیم آن بر ۱۰ مساوی ۱ شود.

-سخت

## ۲.گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} a \overset{13}{\equiv} 5 \Rightarrow \overset{13}{\equiv} 5 + 13 \times 5 = 70 \\ a \overset{18}{\equiv} 7, 9 \mid 18 \Rightarrow \overset{9}{a \equiv 7} \Rightarrow \overset{9}{a \equiv 7} + 9 \times 7 = 70 \end{array} \right\} \Rightarrow a \overset{117}{\equiv} 70$$

تذکر ۱) به جای پیمان‌نامه می‌توان مقسوم‌علیه‌های طبیعی بزرگتر از یک پیمان‌نامه را قرار داد.

$$a \equiv^m b \quad , \quad n|m \Rightarrow a \equiv^n b$$

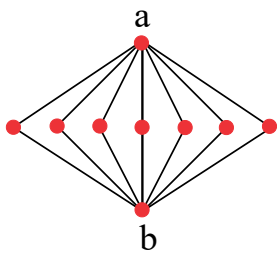
$$\left\{ \begin{array}{l} a \equiv^m b \\ a \equiv^n b \end{array} \right. \Rightarrow a \equiv^{[m,n]} b$$

-متوسط

### ۳.۳. گزینہ ۳

گراف مربوط به این دنباله ی درجات به صورت مقابل است. تمام دورها باید از رؤس  $a, b$  عبور کنند و دو رأس

دیگر را باید از بین ۷ رأس میانی برگزینیم بنابراین تعداد دورهای به طول ۴ برابر است با:  $\binom{7}{2} = ۲۱$



-سخت

۴.۴. گزینہ ۴

می دانیم در قضیه تقسیم  $a = bq + r$  باید  $0 \leq r < b$  باشد. بنابراین:

$$r = q^r - r$$

$$a = \mathfrak{V} \nabla q + q^{\mathfrak{V}} - \mathfrak{V}$$

$$0 \leq r \leq b \Rightarrow q^r - r < 37 \Rightarrow q^r < 39$$

$$\xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} \max(q) = 6 \Rightarrow \max(a) = 37 \times 6 + 6^2 - 2 = 222 + 36 = 258 = 16^2$$

-متوسط

## ۵. گزینه ۱

روش اول: اگر پیمانه عدد اول باشد و باقی مانده عددی تواندار بر پیمانه را بخواهیم، سعی می کنیم از فرما استفاده کنیم.

$$۱۱ \equiv ۱ \pmod{۳۱} \xrightarrow{\text{توان ۵}} ۱۱ \equiv ۱ \pmod{۳۵}$$

$$\begin{aligned} 348 \equiv x &\xrightarrow[\text{در } 3^2]{\text{ضرب}} 350 \equiv 9x \Rightarrow 9x \equiv 1 \xrightarrow{\text{از طرفین ۹ واحد کم می کنیم}} -2x \equiv -10 \\ \div(-2) &\Rightarrow x \equiv 5 \end{aligned}$$

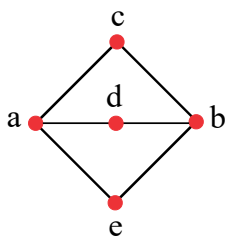
## روش دوم:



$$۳۱ \circ \frac{۱۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳۵ \circ \frac{۱۱}{\equiv} ۱ \frac{۱۱}{\equiv} ۱۲ \xRightarrow{\div ۳} ۳۴۹ \frac{۱۱}{\equiv} ۴ \frac{۱۱}{\equiv} ۱۵ \xRightarrow{\div ۳} ۳۴۸ \frac{۱۱}{\equiv} ۵$$

تذکر در همنهشتی هر جا خواستیم طرفین هم نهشتی را بر عدد  $c$  تقسیم کنیم مضارب پیمانه را طوری به یک طرف اضافه می کنیم که بر  $c$  بخشپذیر شود.

-متوسط



$$\begin{pmatrix} ۳ \\ ۲ \end{pmatrix} = ۳$$

۶.گزینه ۱  
روش اول: گراف، غیر کامل است. بهتر است همه دورها را به کمک شکل بررسی کنیم.  
دورهای موجود عبارتند از:  $a c b d a$ ,  $a d b e a$ ,  $a c b e a$

روش دوم: هر دور باید از رئوس  $a, b$  عبور کند و از بین رئوس  $c, d, e$  باید دو رأس انتخاب شود.  $\begin{pmatrix} ۳ \\ ۲ \end{pmatrix} = ۳$

-سخت

۷.گزینه ۲

شرط وجود جواب در معادله ی سیاله  $ax + by = c$  آن است که:

$$(a, b) | c$$

$$(۶۰, ۸۴) | ۵n - ۱ \Rightarrow ۱۲ | ۵n - ۱$$

$$\Rightarrow ۵n - ۱ \equiv \frac{۱۲}{\circ} \Rightarrow ۵n \equiv ۱ \Rightarrow ۵n \equiv ۱ + ۲۴ = ۲۵ \xRightarrow{\div ۵} n \equiv \frac{۱۲}{۵}$$

گزینه صحیح گزینه‌ای است که باقیمانده‌ی تقسیم آن بر ۱۲ مساوی ۵ شود. فقط گزینه ی ۲ این ویژگی را دارد.

-متوسط

۸.گزینه ۲

با توجه به اینکه  $۴۳۳۴$  و  $۳۴۴۳$  از پیمانه یعنی ۸ بزرگتراند، ابتدا باقی مانده تقسیم آنها را بر ۸ می یابیم و باقی مانده تقسیم را به جای آنها جایگزین می کنیم سپس از توانهای کوچک شروع می کنیم تا به توان دلخواه برسیم.

$$۳۴۴۳ \equiv \frac{۸}{۳}, \quad ۴۳۳۴ \equiv \frac{۸}{۶} - ۲$$

$$۳^۲ \equiv \frac{۸}{۱} \Rightarrow ۳^{۴۴} \equiv \frac{۸}{۱}$$

$$(-۲)^۳ \equiv \frac{۸}{\circ} \Rightarrow (-۲)^{۳۳} \equiv \frac{۸}{\circ}$$

$$(۳۴۴۳)^{۴۴} + (۴۳۳۴)^{۳۳} \equiv ۱ + \circ \equiv \frac{۸}{۱}$$

-متوسط

۹.گزینه ۴

$$n = ۱$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} ۵^۵ \equiv ۵^۲ \times ۵^۲ \times ۵^۳ \equiv (-۶) \times (-۶) \times ۵^۳ \\ ۳۶ \times ۵^۳ \equiv ۲۵ \\ ۲^۹ \equiv ۲^۵ \times ۲^۴ \equiv ۱ \times ۱۶ \equiv ۱۶ \end{cases}$$

مضارب پیمانه را می توان به یک طرف یا دو طرف رابطه هم نهشتی اضافه یا کم کرد، مثلاً:  $۵^۲ \equiv ۲۵ - ۳۱ \equiv -۶$

$$۵^۵ + ۲^۹ - ۶ \equiv ۲۵ + ۱۶ - ۶ \equiv ۳۵ \equiv ۴$$

-سخت



۱۰. گزینه ۴

$$81 = 3^4 \Rightarrow 81^{14} = 3^{56}$$

$$231^{57} = (3 \times 73)^{57} = 3^{57} \times 73^{57} = 3^{56}$$

پس بر ۳۵۶ بخش پذیر است.

$$\times (3 \times 7^{57})$$

-سخت

۱۱. گزینه ۳

$$\left. \begin{array}{l} \text{به توان زوج برسد} \xleftarrow{\text{رقم یکان } 6} \\ \text{به توان فرد برسد} \xleftarrow{\text{رقم یکان } 4} \end{array} \right\} \text{تذکر: اگر رقم یکان عددی } 4 \text{ باشد}$$

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$$

$$n^3 - n \equiv 0 \pmod{6} \equiv 0 \pmod{3} \equiv 0 \pmod{2}$$

حاصل ضرب سه عدد متوالی مضرب ۶ است پس زوج است.

-متوسط

$$\left. \begin{array}{l} \text{به توان زوج برسد} \xleftarrow{\text{رقم یکان } 1} \\ \text{به توان فرد برسد} \xleftarrow{\text{رقم یکان } 9} \end{array} \right\} \text{تذکر: اگر رقم یکان عددی } 9 \text{ باشد}$$

$$119^{19} \equiv 9^{19} \equiv 9 \pmod{9} \Rightarrow 119 \equiv 9 \pmod{9}$$

نکته: عدد فرد به هر توانی برسد، فرد است یعنی  $19^9$  عددی فرد است.

-آسان

۱۳. گزینه ۳

$$x^a + y^a / x^n + y^n ; \left( \frac{n}{a} = \text{فرد} \right)$$

باید ۹ بر  $n$  بخش پذیر و  $\frac{9}{n}$  باید فرد باشد.

$$n | 9 \rightarrow n = 1, 3, 9$$

$$2^n + 1 | 2^9 + 1 \Rightarrow \frac{9}{n} = k \in \text{اعداد فرد} \Rightarrow n = 1, 3, 9$$

از طرفی هم  $\frac{9}{1}$  و هم  $\frac{9}{3}$  و هم  $\frac{9}{9}$  فردند پس  $n$ ، ۳ مقدار مختلف دارد.

-متوسط

۱۴. گزینه ۱

$$A \equiv 1^7 + 2^7 + 3^7 + 4^7 + 5^7 + 6^7$$

به جای ۵۰ تا ۵۵ باقی مانده تقسیم آنها بر ۷ را جایگزین می کنیم.

$$A \equiv 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \equiv 0$$

طبق نتیجه فرما اگر  $p$  عددی اول باشد داریم  $a^p \equiv a$ 

-متوسط

۱۵. گزینه ۴

$$a | b \Rightarrow a^2 | b^2 \xrightarrow{b^2 | b^3} \Rightarrow a^2 | b^3$$

سایر گزینه ها دارای مثال نقض می باشند.

$$6 | 4 \times 9 \Rightarrow 6 \nmid 4, 6 \nmid 9$$

$$2 | 5 \pm 3 \Rightarrow 2 \nmid 5, 2 \nmid 3$$

تذکر: اگر  $a | bc$  ,  $a$  عددی اول باشد آنگاه  $a | b$  یا  $a | c$ 

-آسان



۱۶.گزینه ۲

گراف  $G$  از مرتبه  $p$  با حداقل  $p - 1$  یال می تواند همبند باشد.

$$p - 1 = 16 = \text{حداقل تعداد یال}$$

-آسان

۱۷.گزینه ۱

در ابتدا توجه کنید که گراف فرد منتظم مرتبه فرد وجود ندارد پس گزینه ۲ و ۳ حذف می شوند.

دقت کنید که گراف ۳- منتظم ناهمبند حداقل از دو بخش که هر کدام دارای حداقل ۴ رأس است تشکیل شده است پس حداقل مرتبه ی گراف، ۸ می باشد.

-متوسط

۱۸.گزینه ۳ گزینه (۱) برقرار است.

گزینه (۲) برقرار است.

گزینه (۳) مثال نقض دارد چون می توان متوازی الاضلاعی پیدا کرد که مستطیل باشد.

گزینه (۴) برقرار است.

-متوسط

۱۹.گزینه ۲ تذکر:اعداد به فرم  $2^n$  را نمی توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت.

-متوسط

۲۰.گزینه ۳

در این تست داریم:

$$\left. \begin{aligned} q(k_7) &= \binom{7}{2} = 21 \\ q(k_8) &= \binom{8}{2} = 28 \end{aligned} \right\} \Rightarrow q(k_7) < 23 < q(k_8)$$

بنابراین گرافی ساده با ۲۳ یال حداقل ۸ رأس دارد.

-آسان

۲۱.گزینه ۴

الگوریتم تقسیم را می نویسیم:

$$a = 15 \times q + 6$$

حال  $k$  واحد به مقسوم اضافه می کنیم. با توجه به این که مقسوم علیه و خارج قسمت تغییر نمی کند، داریم:

$$a + k = 15 \times q + \overbrace{(6 + k)}^{\text{باقی مانده}}$$

$$6 + k < 15 \Rightarrow k < 9 \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} \max(k) = 8$$

باقی مانده باید از مقسوم علیه کوچک تر باشد، بنابراین:

-آسان

۲۲.گزینه ۳ روش اول: طبق فرض داریم:

$$\frac{0 \leq r}{a} < 1 \xrightarrow{\quad} 10 \leq \frac{787}{a} < 11 \Rightarrow \begin{cases} 10a \leq 787 \Rightarrow a \leq 78,7 \\ \frac{787}{11} < a \Rightarrow a \geq 72 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 787 = a \times 10 + r \\ a \in \mathbb{N} \end{cases} \xrightarrow{\div a} \frac{787}{a} = 10 + \frac{r}{a}$$

۷ مقدار طبیعی برای  $a$  وجود دارد که عبارتند از : ۷۸,۰۰۰, ۷۳,۷۲

$$787 = a \times 10 + r$$

روش دوم:

$$q = \left[ \frac{a}{b} \right] \Rightarrow 10 = \left[ \frac{787}{a} \right] \xrightarrow{\text{عکس کنید}} \frac{1}{11} < \frac{a}{787} \leq \frac{1}{10} \xrightarrow{\times 787} \frac{787}{11} < a \leq \frac{787}{10} \rightarrow 72 \leq a$$

$$\leq 78$$

$$a \text{ تعداد} = 78 - 72 + 1 = 7$$

-متوسط

۲۳.گزینه ۴ عدد  $10 + 1393!$  اول نیست چون به ۱۰ بخش پذیر است.

۱۱ نیز اول نیست چون به ۱۱ بخش پذیر است.

است. کلاً عدد  $n! + r$  وقتی  $2 \leq r \leq n$ ، اول نیست. چون  $r$  در حاصلضرب  $n!$  وجود دارد و این عدد به  $r$  بخش پذیر است. پس

تا  $1393! + 1393$  عدد اول وجود ندارد.  $1393! + 1394$  و  $1393! + 1396$  هم زوجند و اول نیستند.  $1393! + 1395$

هم به ۵ بخش پذیر است، پس اول نیست.





-متوسط

۲۴.گزینه ۴ تذکر: تعداد دورهای بطول  $m$  در گراف  $Kp$  از دستور  $\binom{p}{m} \times \frac{(m-1)!}{2}$  بدست می آید.

$$:۴ = \binom{۸}{۴} \times \frac{۳!}{۲} \xrightarrow{\text{همگی شامل رأس } a} \binom{۷}{۳} \times \frac{۳!}{۲} \xrightarrow{\text{همگی فاقد } g} \binom{۶}{۳} \times \frac{۳!}{۲} = ۶۰$$

گراف  $K_۸$ 

-آسان

۲۵.گزینه ۲ نکته:در هر گراف  $Kp$  تعداد یالها  $\binom{p}{۲} = \frac{p(p-1)}{۲}$  می باشد.

$$p \times q = ۵۰ \Rightarrow p \times \frac{p(p-1)}{۲} = ۵۰ \rightarrow p^2(p-1) = ۱۰۰ \rightarrow p^2(p-1) = ۵^2 \times ۴ \Rightarrow p = ۵$$

مسیر بطول ۳ به ۴ رأس نیاز دارد. یکی از رؤوس  $a$  می باشد. همچنین مسیر فاقد رأس  $b$  است پس باید ۳ رأس دیگر مسیر را از بین

۳ رأس باقی مانده به  $\binom{۳}{۳}$  طریق انتخاب کنیم. حال ۴ رأس باقی مانده را به ۴! طریق می توانیم کنار هم جابجا کنیم ولی باتوجه

به اینکه دو مسیر  $x_۱x_۲x_۳x_۴$  ,  $x_۴x_۳x_۲x_۱$  یکی هستند باید عدد حاصل را بر ۲ تقسیم کنیم.

$$\text{جواب} = \binom{۳}{۳} \times ۴! \times \frac{۱}{۲} = ۱۲$$

-سخت

۲۶.گزینه ۴ برای هر دو عدد به شکل  $۴q + ۳$  داریم:

$$(۴q + ۳)(۴q' + ۳) = ۱۶qq' + ۱۲q + ۱۲q' + ۹ = ۴(۴qq' + ۳q + ۳q' + ۲) + ۱ = ۴q'' + ۱$$

یعنی باقی مانده ی تقسیم حاصل ضرب دو عدد بفرم  $۴q + ۳$  عددی است که باقی مانده اش بر ۴ برابر ۱ است.

برای هر دو عدد بفرم  $۶k + ۵$  داریم:

$$(۶k + ۵)(۶k' + ۵) = ۳۶kk' + ۳۰k + ۳۰k' + ۲۵ = ۶(۶kk' + ۵k + ۵k' + ۴) + ۱ = ۶k'' + ۱$$

یعنی باقی مانده ی تقسیم حاصل ضرب دو عدد به فرم  $۶k + ۵$  عددی است که باقی مانده ی آن بر ۶ برابر ۱ است.

پس گزینه ای درست است که باقی مانده ی آن بر ۴ برابر ۳ و دیگری بر ۶ برابر ۵ باشد. که اعداد ۱۲۹ و ۸۵ دارای این ویژگی است.

-متوسط

۲۷.گزینه ۳

$$\begin{cases} a = bq + r \\ a + ۱۴ = b(q + ۲) + r \end{cases} \Rightarrow bq + r + ۱۴ = bq + ۲b + r \Rightarrow ۲b = ۱۴ \Rightarrow b = ۷$$

-آسان

۲۸.گزینه ۲ ابتدا بایستی تعداد روزها از اول سال تا ۲۰ مهر را تعیین نمائیم و باقی مانده عدد حاصل را بر ۷ حساب کنیم:

ماه	۲۰ مهر	+	۵ ماه	+	فروردین
روز	۲۰	+	$۵ \times ۳۱$	+	۳۰

$$\equiv ۷ \equiv ۲ + ۵ \times ۳ + (-۱) \equiv ۲$$

یعنی ۲ روز بعد از شنبه یعنی دوشنبه، ۲۰ مهر ماه خواهد بود.

-آسان

۲۹.گزینه ۴ نکته: اگر  $a \equiv b$  و  $a \equiv b$  ، آن گاه  $a \equiv b$   $[m,n]$



$$\begin{cases} 3^3 \equiv 7 \pmod{-1} \Rightarrow 3^{99} \equiv 7 \pmod{(-1)^{33} = -1} \Rightarrow 3^{100} \equiv -3 \\ 3^{100} \equiv 3 \pmod{-3} \Rightarrow 3^{100} \equiv -3 \end{cases}$$

حال با توجه به نکته ی بالا داریم:

$$3^{100} \equiv_{[3,7]} -3 \Rightarrow 3^{100} \equiv_{21} -3 \Rightarrow 3^{100} \equiv_{18} 18$$

-متوسط

۳۰. **گزینه ۳** اگر از  $K_5$  یک رأس حذف کنیم، گراف  $K_4$  به دست می آید.

$$q = \frac{4 \times 3}{2} = 6 \text{ با } 6 \text{ برابر است}$$

-آسان

۳۱. **گزینه ۱**

$$\delta \leq \frac{2q}{p} \rightarrow 4 \leq \frac{22}{p} \rightarrow p \leq 5$$

پس  $G$  حداکثر ۵ رأس دارد و حداکثر  $q_{\max} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$  یال دارد. یعنی چنین گرافی وجود ندارد.

-سخت

۳۲. **گزینه ۱**

$$\text{درجه متوسط} : \frac{2q}{p} = 2,5 \rightarrow \frac{2q}{4} = 2,5 \rightarrow 2q = 10 \rightarrow q = 5$$

پس جمع درجات گراف  $2 \times 5 = 10$  می باشد یعنی گزینه ۱ یا ۴.

از طرفی در گزینه ۴ با ۴ رأس، رأسی از درجه ۴ دارد که این غیرممکن است.

-متوسط

۳۳. **گزینه ۲** مجموعه  $A = \{a, e\}$  یک مجموعه احاطه گر برای این گراف است. از طرفی مجموعه ای شامل یک رأس نمی تواند احاطه گر باشد، پس  $\gamma = 2$ .

-آسان

۳۴. **گزینه ۴** اگر از مجموعه  $D$  رئوس  $d$  یا  $e$  یا  $f$  را حذف کنیم مجموعه  $F = \{f, g, h, e\}$  به دست می آید که باز هم احاطه گر است.

-متوسط

۳۵. **گزینه ۱**

$$\begin{cases} a-b \mid 2a+b \\ a-b \mid 2(a-b) \end{cases} \Rightarrow a-b \mid 2a+b - (2a-2b) \Rightarrow a-b \mid 3b$$

$$\begin{cases} a-b \mid 2a+b \\ a-b \mid a-b \end{cases} \Rightarrow a-b \mid 3a$$

$$\begin{cases} a-b \mid 3a \\ a-b \mid 2a+b \end{cases} \Rightarrow a-b \mid 5a+b \quad \text{گزینه (۳)}$$

$$a-b \mid a-b \Rightarrow a-b \mid 3a-3b \quad \text{گزینه (۴)}$$

$$\begin{cases} a-b \mid 2(2a+b) \\ a-b \mid 3b \end{cases} \Rightarrow a-b \mid 4a+5b \quad \text{گزینه (۲)}$$

-متوسط



۳۶.گزینه ۴

$$a^3 b^2 = c \quad \begin{matrix} \text{خارج قسمت} \\ \uparrow \\ (d) \end{matrix} \Rightarrow c \mid a^3 b^2 \Rightarrow (1) \text{گزینه}$$

$$cd = a^2 (ab^2) \Rightarrow a^2 \mid cd \Rightarrow (2) \text{گزینه}$$

$$cd = b(a^3 b) \Rightarrow b \mid cd \Rightarrow (3) \text{گزینه}$$

-متوسط

۳۷.گزینه ۴ برای نقض حکم باید عددی طبیعی مثال بزنیم که به صورت  $6k + 1$  باشد ولی اول نباشد فقط ۴۹ این خاصیت را دارد.

-متوسط

۳۸.گزینه ۱ طبق فرض اعداد ۳۰۱ و ۱۵۸ به پیمانه  $m$  هم‌نهشت‌اند، می‌توان نوشت:

$$301 \equiv 158 \pmod{m} \rightarrow m \mid 301 - 158 \rightarrow m \mid 143 \rightarrow m \mid 13 \times 11$$

می‌دانیم در هم‌نهشتی پیمانه  $m$ ، مجموعه به  $m$  دسته‌افراز می‌شود پس باید کم‌ترین مقدار ممکن را برای  $m$  در نظر بگیریم یعنی  $m = 11$ . حال کم‌ترین مقدار طبیعی  $a$  را بدست می‌آوریم که همان باقیمانده مشترک ۳۰۱ و ۱۵۸ بر ۱۱ است:

$$301 \equiv 11 \pmod{11} \quad 158 \equiv 11 \pmod{11} \quad 4$$

-سخت

$$[15]_{11} \cap [19]_{11} = \emptyset \quad \text{پس } 19 \not\equiv 51 \pmod{11} \quad \text{گزینه ۱: چون } 19 \not\equiv 51 \pmod{11}$$

$$[39]_8 = [23]_8 \quad \text{پس } 39 \equiv 23 \pmod{8} \quad \text{گزینه ۲: چون } 39 \equiv 23 \pmod{8}$$

$$[3]_{10} \cap [6]_7 \neq \emptyset \quad \text{پس } 13 \in [3]_{10} \cap [6]_7 \quad \text{بنابراین } 13 \equiv 6 \pmod{7} \text{ و } 13 \equiv 3 \pmod{10} \quad \text{گزینه ۳: چون } 13 \equiv 6 \pmod{7} \text{ و } 13 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$[6]_{17} \not\subset [3]_{21} \quad \text{ولی } 23 \in [6]_{17} \quad \text{پس } 23 \notin [3]_{21} \quad \text{گزینه ۴: } 23 \in [6]_{17} \text{ ولی } 23 \notin [3]_{21}$$

-سخت

$$ac \equiv bc \xrightarrow{(c,m)=d} a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}} \quad \text{تذکر: } 40. \text{گزینه ۱}$$

گزینه ۲:

$$14a \equiv 21b \xrightarrow{\div 7} 2a \equiv 3b \xrightarrow{(7,42)=7} 2a \equiv 3b$$

گزینه ۴:

$$2a \equiv 3b \xrightarrow{2 \mid 6} \begin{cases} 2a \equiv 3b \\ 2a \equiv 0 \end{cases} \rightarrow 3b \equiv 0 \xrightarrow{(3,2)=1} b \equiv 0 \rightarrow 2 \mid b$$

گزینه ۳:

$$2a \equiv 3b \xrightarrow{3 \mid 6} \begin{cases} 3b \equiv 2a \\ 3b \equiv 0 \end{cases} \rightarrow 2a \equiv 0 \xrightarrow{(2,3)=1} a \equiv 0 \rightarrow 3 \mid a$$

برای رد گزینه ۱ اگر قرار دهیم  $a = b = 0$  رابطه  $14a \equiv 21b$  برقرار است ولی  $b \not\equiv 1$ .

-سخت



پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۹۱۲۷۳۵

۱ -۵	۴ -۴	۳ -۳	۲ -۲	۳ -۱
۴ -۱۰	۴ -۹	۲ -۸	۲ -۷	۱ -۶
۴ -۱۵	۱ -۱۴	۳ -۱۳	۲ -۱۲	۳ -۱۱
۳ -۲۰	۲ -۱۹	۳ -۱۸	۱ -۱۷	۲ -۱۶
۲ -۲۵	۴ -۲۴	۴ -۲۳	۳ -۲۲	۴ -۲۱
۳ -۳۰	۴ -۲۹	۲ -۲۸	۳ -۲۷	۴ -۲۶
۱ -۳۵	۴ -۳۴	۲ -۳۳	۱ -۳۲	۱ -۳۱
۱ -۴۰	۴ -۳۹	۱ -۳۸	۴ -۳۷	۴ -۳۶

