

تاریخ :

وقت : دقیقه

سریال ۹۱۳۷۲۰

افشار

نام و نام خانوادگی :

تعداد سوالات: ۵۰

موضوع حسابان ۲ و کنکور پایه -دوازدهم (* مثلثات * تابع * حد)

مرکز مشاوره تحصیلی دکتر علیرضا افشار

۱. دامنه تابع $y = \sqrt{-\frac{x}{3} - 2} + \sqrt{\frac{x}{3} + 2}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۴

۲. معکوس تابع $y = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 4}{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}$ محور y ها را با چه عرضی قطع می کند؟

- (۱) $-1 + \sqrt[3]{3}$ (۲) $-1 - \sqrt[3]{3}$ (۳) $1 - \sqrt[3]{3}$ (۴) $1 + \sqrt[3]{3}$

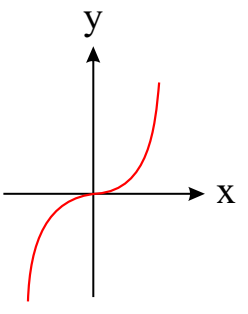
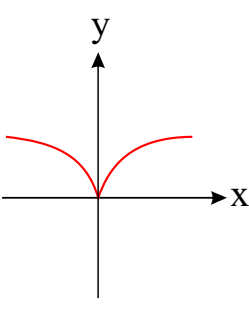
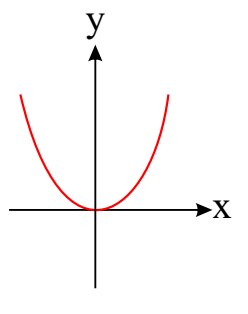
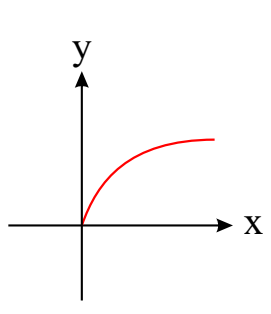
۳. اگر $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{2}$ باشد حاصل کسر $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

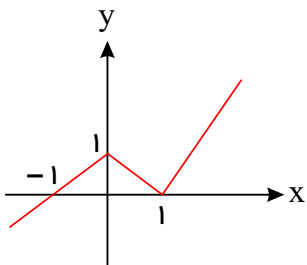
۴. دامنه تابع $y = \sqrt{\sin^4 x - 2\sin^2 x}$ کدام است؟

- (۱) \mathbb{R} (۲) $\frac{k\pi}{2}$ (۳) $k\pi$ (۴) $2k\pi + \pi$

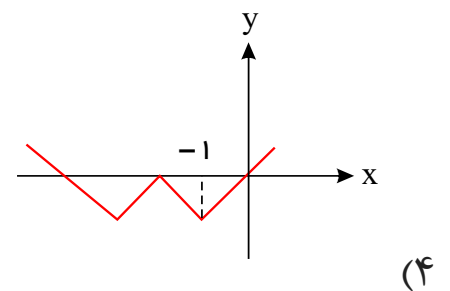
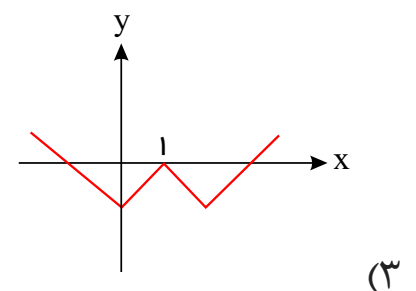
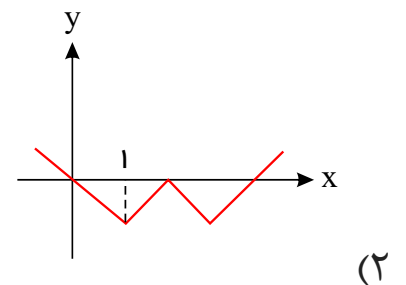
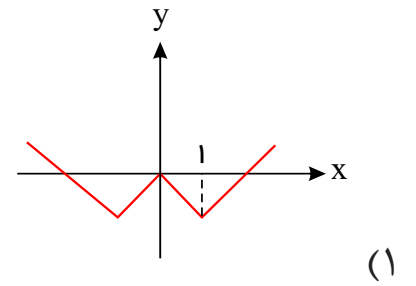
۵. نمودار تابع $y = \sqrt{|x|}$ کدام است؟

- (۱)  (۲)  (۳)  (۴) 





۶. نمودار تابع f به صورت مقابل است نمودار تابع $|f(-x + 2)| - 1$ کدام است؟



۷. نمایش هندسی تابع معکوس تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ از کدام نقطه می گذرد؟

- (۱) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2)$ (۲) $(1, 0)$ (۳) $(0, 1)$ (۴) $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$

۸. با توجه به ماشین $f \rightarrow 6 - 2x$ و $x \rightarrow g \rightarrow 2x + 1$ آنگاه، مقدار $f(7) = ?$ کدام است؟

(۱) ۷ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) ۳

۹. دوره تناوب تابع $y = \sin 2x - \frac{3}{2} \cos^3 \pi x + 4$ کدام است؟

- (۱) π (۲) ۲ (۳) متناوب نیست (۴) متناوب است ولی کوچکترین دوره تناوب ندارد

۱۰. اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5)\}$ و $g = \{(2, m), (3, 7), (5, 2)\}$ ، آنگاه به ازای کدام مقدار m ، توابع $f + g$ و $g \circ f$ هر دو یک به یک هستند؟

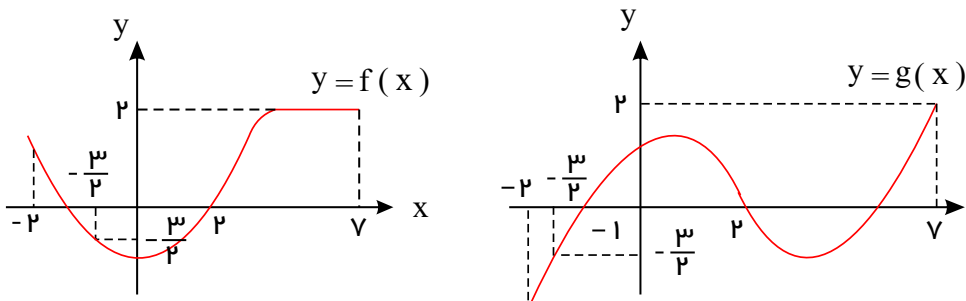
- (۱) ۹ (۲) ۷ (۳) ۲ (۴) ۱



۱۱. f تابعی یک به یک و $g(x) = f(2x^3 + 1) + 1$ است. اگر $f^{-1}(5) = 3$ و $g^{-1}(a+1) = 1$ باشد، حاصل a کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۰

۱۲. نمودارهای توابع f و g به صورت زیر هستند. عبارت $\frac{1}{\sqrt{f(x) - g(x)}}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف شده است؟



- (۱) $(-2, 2) \cup (2, 7)$
 (۲) $[-2, -\frac{3}{2}] \cup [2, 7]$
 (۳) $(-2, 7) - \{-\frac{3}{2}, 2\}$
 (۴) $[-2, -\frac{3}{2}) \cup (2, 7)$

۱۳. دو تابع f و g به صورت مجموعه‌ی زوج‌های مرتب بیان شده‌اند. در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟

- (۱) $f \cup g$ (۲) $f \cap g$ (۳) $f - g$ (۴) $f \circ g$

۱۴. اگر $\tan x = \sqrt{2}$ باشد، آن گاه حاصل عبارت $A = \frac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۱

۱۵. دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x - |x|}{\sin^2(\pi x)}}$ کدام است؟

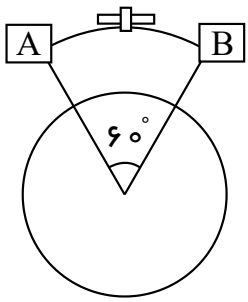
- (۱) $\mathbb{R} - \{0\}$ (۲) $[0, +\infty) - \mathbb{N}$ (۳) $[0, +\infty) - \mathbb{W}$ (۴) $(0, +\infty)$

۱۶. دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x}{2[x] + 3}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\}$ (۲) $\mathbb{R} - [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$ (۳) \mathbb{R} (۴) $\mathbb{R} - \{-1\}$



۱۷. ماهواره‌ای مطابق شکل بر روی مدار دایره‌ای شکل به شعاع 500 Km در حال حرکت است. این ماهواره در جابجایی از A به B چه مسافتی را باید طی کند؟



$$\frac{500}{3}\text{ Km} \quad (2)$$

$$300\pi\text{ Km} \quad (4)$$

$$\frac{500\pi}{3}\text{ Km} \quad (1)$$

$$30000\text{ Km} \quad (3)$$

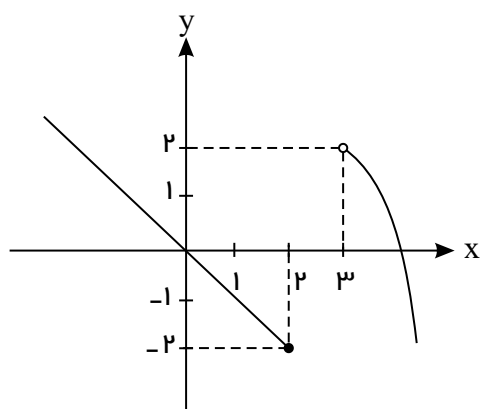
۱۸. اگر $\sin x = \frac{3}{5}$ و x در ناحیه‌ی دوم باشد. حاصل $\tan\left(\frac{17\pi}{2} + x\right)$ کدام است؟

$$-\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (1)$$



۱۹. نمودار تابع f بصورت مقابل است، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} f \circ f(x)$ کدام است؟

$$-2 \quad (2)$$

$$(4) \text{ حد ندارد.}$$

$$2 \quad (1)$$

$$(3) \text{ صفر}$$

۲۰. هرگاه $\tan 15^\circ = a$ باشد، حاصل عبارت $\frac{2 \cos 15^\circ + \cos 105^\circ}{\sin 195^\circ + \cos 165^\circ}$ کدام است؟

$$\frac{2-a}{1+a} \quad (4)$$

$$\frac{2+a}{1-a} \quad (3)$$

$$\frac{2+a}{1+a} \quad (2)$$

$$\frac{2-a}{-1-a} \quad (1)$$

۲۱. اگر تابع f در نقطه‌ی $x = -2$ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow -2} (f(x) + 3x - 1) = 9$ آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ کدام است؟

$$-16 \quad (4)$$

$$14 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$16 \quad (1)$$

۲۲. حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$ کدام است؟

$$-\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (1)$$

۲۳. اگر توابع $f = \{(-4, 7), (3n, 6), (5, m^2 - 1)\}$ و $g = \{(-4, p + 3), (9, 6), (5, 8)\}$ برابر باشند،

حاصل $m - n + p$ کدام است؟

$$-4 \quad (4)$$

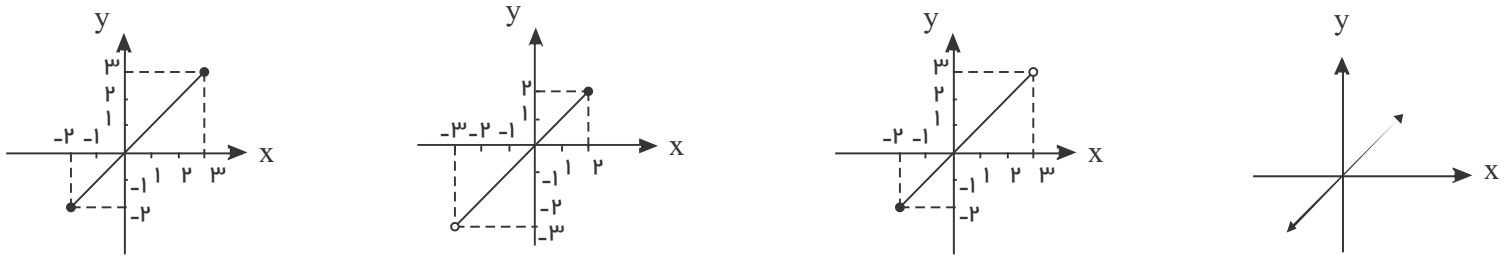
$$-10 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$



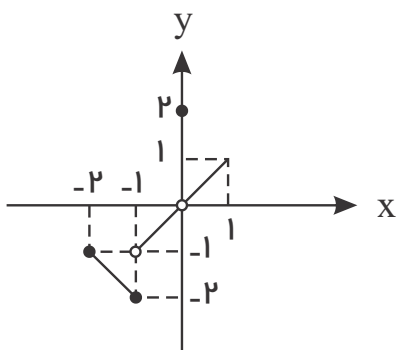
۲۴. تابع وارون‌پذیر f با $Df = \mathbb{R}$ و $Rf = [-2, 3)$ مفروض است، نمودار تابع $y = f \circ f^{-1}(x)$ کدام است؟



۲۵. اگر $f(x) - 3f(-x) = x^3 + 2$ ، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - 1$ (۲) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 1$
(۳) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 1$ (۴) $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 1$

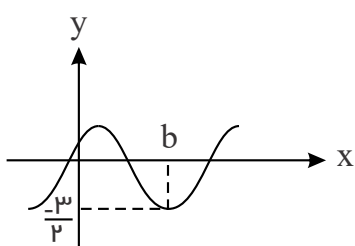
۲۶. اگر $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-2x}$ و نمودار تابع $y = g(x)$ به صورت زیر باشد، در این صورت به ازای چه مقداری از a ، $f(g^{-1}(a)) = 1$ است؟



- (۱) -۲ (۲) -۱
(۳) ۱ (۴) صفر

۲۷. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & ; x \leq -1 \\ m - x & ; x > -1 \end{cases}$ یک به یک باشد، حدود m کدام است؟

(۱) $m \geq -8$ (۲) $m \leq -8$
(۳) $m > -7$ (۴) f به ازای هیچ مقداری از m ، یک به یک نمی‌شود.



۲۸. اگر نمودار تابع $y = a + \cos(x - \frac{\pi}{6})$ به صورت مقابل باشد، مقدار ab کدام است؟

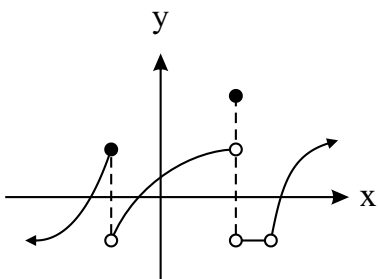
- (۱) $-\frac{7\pi}{6}$ (۲) $-\frac{7\pi}{12}$
(۳) $\frac{7\pi}{6}$ (۴) $\frac{7\pi}{12}$



۲۹. عبارت $A = \frac{\sin 2^\circ \cos 5^\circ + \sin 5^\circ \cos 2^\circ}{\sin 4^\circ \sin 1^\circ - \cos 4^\circ \cos 1^\circ}$ با کدام گزینه برابر است؟

- (۱) $\frac{1}{2 \sin 2^\circ}$ (۲) $-\frac{1}{2 \sin 2^\circ}$ (۳) $2 \sin 2^\circ$ (۴) $-2 \sin 2^\circ$

۳۰. نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. این تابع در چند نقطه حد ندارد؟



- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - 3x + 1}{x^2 - 1}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

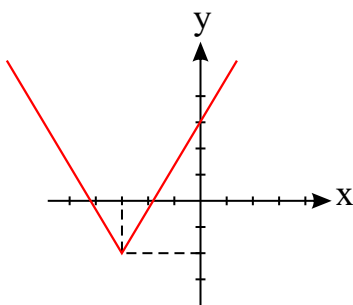
۳۲. اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{\log x}$ ، دامنه تابع $g \circ f$ کدام است؟

- (۱) $[2, +\infty)$ (۲) $[\frac{5}{2}, +\infty)$ (۳) $[3, +\infty)$ (۴) $[\frac{7}{2}, +\infty)$

۳۳. حاصل جمع ریشه‌های $f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 + x - 2}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) -۲

۳۴. شکل $f(x) = m|x-n| + q$ در زیر رسم شده است. مقدار m کدام است؟

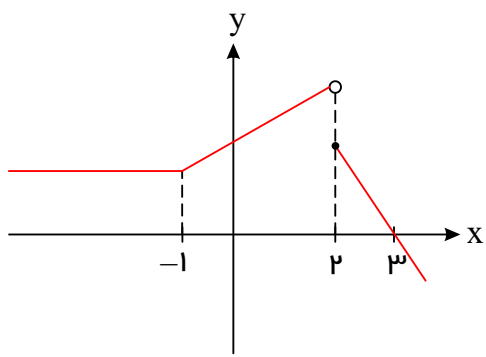


- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{5}{2}$

۳۵. اگر دامنه تابع $y = f(x)$ به صورت $Df = [-6, 3]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = f(2x-1) + 2$ کدام است؟

- (۱) $[-13, 5]$ (۲) $(-\frac{5}{2}, 2]$ (۳) $(-13, 5]$ (۴) $[-\frac{5}{2}, 2)$





۳۶. نمودار تابع f بصورت مقابل است، تابع f در کدام بازه اکیداً صعودی است؟

- (۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $[1, 3]$ (۳) $[-1, 2]$ (۴) $(-1, 2)$

۳۷. اگر چند جمله‌ای $f(x) = mx^4 + nx^2 + 5$ بر $x^2 + 1$ بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم

$g(x) = mx^9 + nx^6 - 4$ بر $x^3 + 1$ کدام است؟

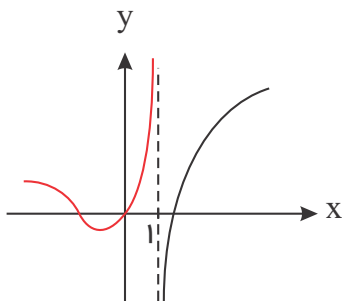
- (۱) -1 (۲) 1 (۳) صفر (۴) 2

۳۸. معادله $4\sin^4 x + 4\cos^4 x = 3$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

- (۱) صفر (۲) 2 (۳) 4 (۴) 8

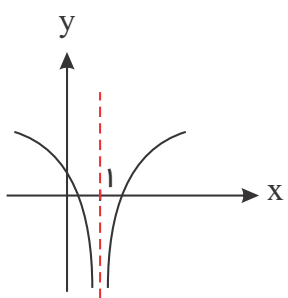
۳۹. نمودار تابع f بصورت مقابل است.

حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{x+2}{f(x)} \right]$ کدام است؟ ([] جزء صحیح است.)



- (۱) صفر (۲) 1 (۳) -1 (۴) $+\infty$

۴۰. نمودار تابع f بصورت مقابل است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{x} + f(x) \right)$ کدام است؟



- (۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۳) 2 (۴) -2

۴۱. اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} (mx^2 - (x+1)^2 + 2) = -\infty$ ، آنگاه حدود m کدام است؟

- (۱) $m > 0$ (۲) $m < 0$ (۳) $m > 1$ (۴) $m < 1$

۴۲. با کدام عمل تابع $f(x) = |\sin x|$ دچار انبساط افقی می‌شود؟

(۱) قرینه نسبت به محور x و ضرب $f(x)$ در 2 (۲) قرینه نسبت به محور y و 2 واحد به بالا

(۳) قرینه نسبت به محور x و ضرب $f(x)$ در $\frac{1}{2}$ (۴) قرینه نسبت به محور y و 2 واحد به پایین



۴۳. چه تعداد از جملات زیر صحیح است؟

الف) تابع $y = \sin ax$ در $x = \frac{\pi}{a}$ حداکثر مقدار را دارد.

ب) تابع $y = \cos ax$ در $x = \frac{\pi}{a}$ حداقل مقدار را دارد.

ج) دوره تناوب تابع $y = \sin^2 ax$ نصف دوره تناوب تابع $y = \cos ax$ است.

د) دوره تناوب تابع $y = |\sin x|$ برابر دوره تناوب تابع $y = \cos 2x$ است.

(۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۴. کدام گزینه در مورد توابع $f(x) = \frac{1}{(|x| + 1)|x|}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$ درست است؟

(۱) دامنه f زیرمجموعه برد آن است.

(۲) دامنه f زیرمجموعه برد g است.

(۳) دامنه های f و g برابرند.

(۴) دامنه g زیرمجموعه برد آن است.

۴۵. چه تعداد از رابطه های زیر نمی توانند تابع باشند؟

الف) رابطه ای که به هر فرد نوشیدنی مورد علاقه او را نسبت می دهد.

ب) رابطه ای که به هر عدد، ریشه دوم آن عدد را نسبت می دهد.

پ) رابطه ای که به هر عدد صحیح مخالف صفر که در نامعادله $x^2 - 4 < 0$ صدق کند، مقسوم علیه های طبیعی آن عدد را نسبت می دهد.

ث) رابطه ای که دامنه آن، اعداد صحیح مجموعه جواب نامعادله $|x - 1| < 1$ و برد آن، اعداد طبیعی مجموعه جواب نامعادله $2x^2 - 18 < 0$ است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۶. اگر در مثلث $\triangle ABC$ داشته باشیم $\cos(\hat{A} - \hat{B}) + \sin(\frac{\hat{B}}{2} + \hat{C}) = 2$ نوع مثلث $\triangle ABC$ کدام است؟

(۱) قائم الزاویه غیر متساوی الساقین

(۲) قائم الزاویه متساوی الساقین

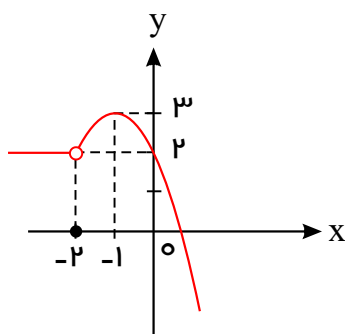
(۳) متساوی الاضلاع

(۴) مختلف الاضلاع با یک زاویه بزرگتر از 90°

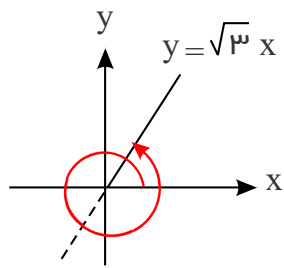
۴۷. اگر نمودار روبه رو مربوط به تابع $f(x) = \begin{cases} a + c & ; x < -2 \\ bx^2 - cx + 2b & ; x = -2 \\ -(x - a)^2 + 3 & ; x > -2 \end{cases}$ باشد، b کدام است؟

(۱) -۳ (۲) -۱

(۳) ۱ (۴) ۳



۴۸. زاویه نشان داده شده در شکل مقابل، برابر کدام گزینه است؟



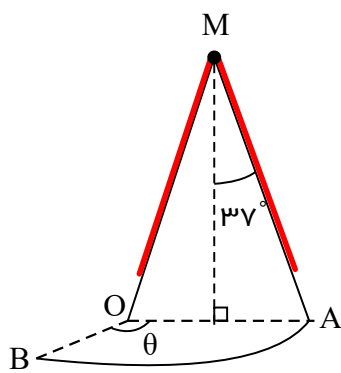
(۲) $\frac{4\pi}{3}$

(۱) 390°

(۴) $\frac{7\pi}{3}$

(۳) $\frac{13\pi}{6}$

۴۹. به وسیله پرگار کمانی از یک دایره به طول ۴۸ سانتی متر رسم (AB) شده است. با توجه به شکل اگر زاویه روبه رو به این کمان برابر $\theta = 120^\circ$ باشد، طول هریک از پاهای پرگار ($OM = AM$) چند سانتی متر است؟



($\pi \simeq 3$, $\sin 37^\circ = \frac{3}{5}$)

(۲) ۳۰

(۱) ۲۵

(۴) ۳۵

(۳) ۲۰

۵۰. کمترین مقدار عبارت $f(x) = -\sin^2 x + \sin x + 1$ کدام است؟

(۴) $-\frac{3}{2}$

(۳) -۱

(۲) $-\frac{5}{4}$

(۱) -۲



| | | |
|---|------------------|--------------|
| تاریخ : | وقت : دقیقه | سریال ۹۱۲۷۲۰ |
| نام و نام خانوادگی : | تعداد سوالات: ۵۰ | افشار |
| موضوع حسابان ۲ و کنکور پایه -دوازدهم (* مثلثات * تابع * حد) | | |
| مرکز مشاوره تحصیلی دکتر علیرضا افشار | | |

۱. گزینه ۴

برای توابعی که چند رادیکال داخل هم دارند ابتدا دامنه رادیکال های داخلی را می یابیم و سپس دامنه رادیکال بزرگتر را حساب می کنیم و بعد اشتراک همه را می گیریم:

$$y = \sqrt{\sqrt{\frac{x}{3} + 2} - (\frac{x}{3} + 2)}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -6 \\ \sqrt{\frac{x}{3} + 2} - (\frac{x}{3} + 2) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{3} + 2} \geq \frac{x}{3} + 2 \Rightarrow \frac{x}{3} + 2 \geq (\frac{x}{3} + 2)^2 \Rightarrow \frac{x}{3} + 2 \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{3} \leq -1 \\ \Rightarrow x \leq -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -6 \leq x \leq -3$$

چهار عدد صحیح

توجه کنیم که اگر $a > 0$ و $a^2 \leq a$ آنگاه قطعاً $a \leq 1$ است.

-سخت

۲. گزینه ۲

می دانیم: برای محاسبه موحل برخورد تابع با محور y ها باید به جای x عدد صفر قرار دهیم یعنی عدد $A \Big|_0^0$ را محاسبه کنیم

بنابراین $A \Big|_0^a$ در تابع معکوس صدق می کند.

$$(0, a) \in f^{-1} \Leftrightarrow (a, 0) \in f$$

$$y = \frac{(x+1)^3 + 3}{(x+1)^3 - 2} \Rightarrow 0 = \frac{(x+1)^3 + 3}{(x+1)^3 - 2} \Rightarrow (x+1)^3 = -3 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{3} - 1$$

-آسان

۳. گزینه ۱

می دانیم:

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \tan^2 \frac{x}{2} = 2$$

-آسان



۴. گزینه ۳

$$\sqrt{\sin^4 x - 2\sin^2 x} \Rightarrow \sin^4 x - 2\sin^2 x \geq 0 \Rightarrow \underbrace{\sin^2 x}_{\geq 0} \underbrace{(\sin^2 x - 2)}_{< 0} \geq 0$$

ضرب یک عبارت منفی در یک عبارت مثبت هرگز مثبت نمی شود پس $\sin^2 x = 0$ می باشد.

$$\sin^2 x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

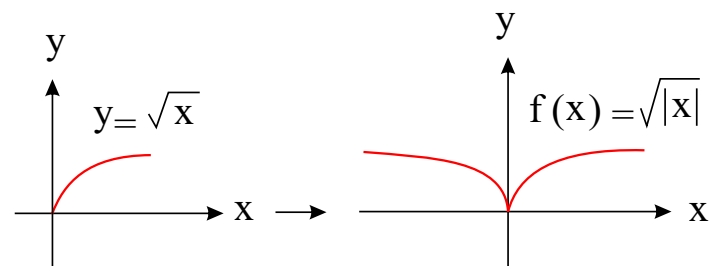
هم چنین می دانیم $\sin^2 x - 2 \neq 0$ است زیرا $-1 \leq \sin x \leq 1$ است

$$\sin^2 x - 2 = 0 \rightarrow \sin^2 x = 2 \rightarrow \sin x = \pm \sqrt{2} \rightarrow$$

-آسان

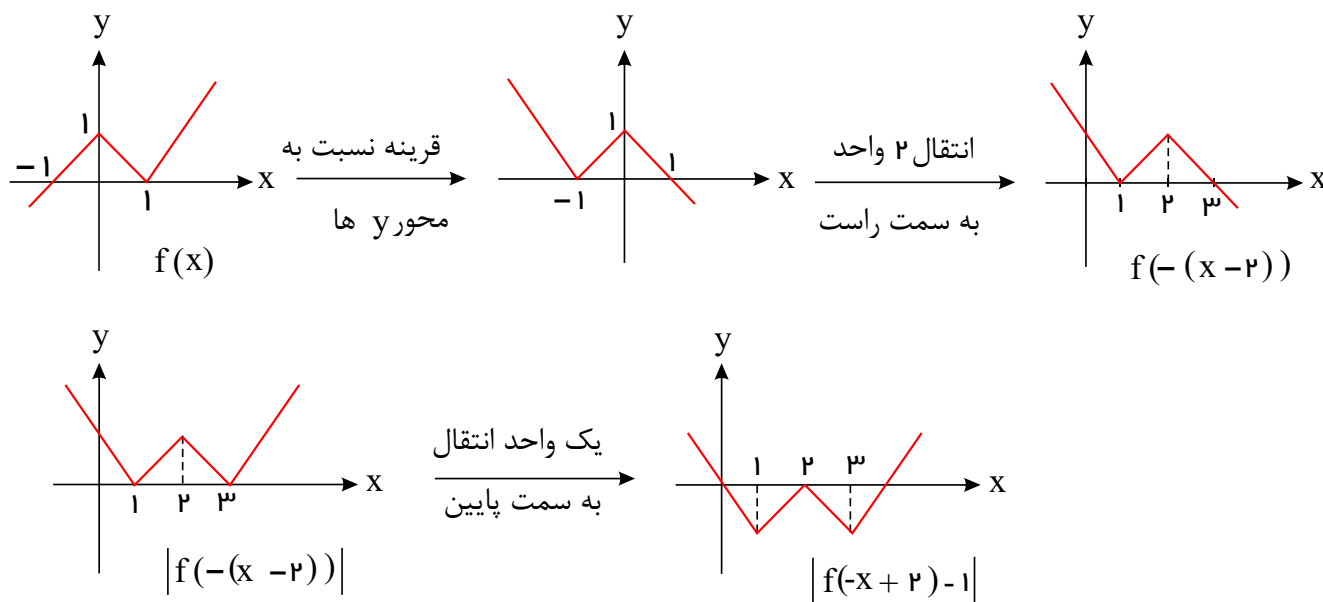
۵. گزینه ۲ برای رسم تابع $y = f(|x|)$ ابتدا نمودار تابع $y = f(|x|)$ را رسم می کنیم و پس سمت چپ محور y ها را حذف کرده و سمت راست را نسبت به محور y ها قرینه می کنیم.

$$y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{-x} & x < 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$$



-آسان

۶. گزینه ۲ ابتدا نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه می کنیم تا به نمودار $y = f(-x)$ برسیم و بعد ۲ را به سمت راست انتقال می دهیم تا به $y = f(-x + 2)$ برسیم و آن قسمت از نمودار تابعه که در زیر محور x ها قرینه می کنیم تا به تابع $y = |f(-x + 2)| - 1$ سپس یک واحد به پایین انتقال می دهیم تا تابع $y = |f(-x + 2)| - 1$ ایجاد شود.



-متوسط

۷. گزینه ۴

تذکر: می دانیم که اگر $A \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \in f$ باشد در اینصورت $A' \begin{vmatrix} b \\ a \end{vmatrix} \in f^{-1}$ می باشد.

$$f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right) \in f^{-1}$$

-آسان

۸. گزینه ۲

با توجه به ماشین ابتدا تابع $y = fog(x)$ را می یابیم:

$$(fog)(x) = 6 - 2x$$

$$g(x) = 7 \Rightarrow x = 3$$

$$fog(x) = 6 - 2x \Rightarrow fog(3) = 0 \Rightarrow f(7) = 0$$

-متوسط

۹. گزینه ۳

$$y = \sin ax, \quad y = \cos ax \rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|} \quad \text{می دانیم:}$$

$$\sin 2x : T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \text{و} \quad \cos 3\pi x : T_2 = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$$

دوره تناوب تابع $\cos x$ یک عدد گویا و دوره تناوب تابع $\sin x$ یک عدد گنگ است و بین یک عدد گویا و عدد گنگ نمی توان ک.م.م گرفت بنابراین این تابع اصلاً متناوب نیست.

-متوسط

۱۰. گزینه ۴

ابتدا زوج مرتب $g \circ f(x)$ و $f + g$ را می یابیم و می دانیم:

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow 2 \rightarrow m &\Rightarrow (1, m) & \text{یک تابع بصورت زوج مرتب در صورتی یک به یک است که مولفه ی دوم یکسان نداشته باشند} \\ 2 \rightarrow 3 \rightarrow 7 &\Rightarrow (2, 7) & \text{و در صورت وجود مولفه ی دوم یکسان باید مولفه های اول آنها برابر باشند.} \\ 3 \rightarrow 5 \rightarrow 2 &\Rightarrow (3, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f &= \{(1, m), (2, 7), (3, 2)\} \Rightarrow m \neq 7, 2 \\ f + g &= \{(2, m + 3), (3, 12)\} \Rightarrow m + 3 \neq 12 \Rightarrow m \neq 9 \end{aligned}$$

تنها $m = 1$ در گزینه ها قابل قبول است.

-متوسط

$$11. \text{گزینه ۳} \quad \text{می دانیم: اگر } A \Big|_a^b \text{ باشد در این صورت } A' \Big|_b^a \in f^{-1} \text{ می باشد.}$$

راه حل اول: f یک به یک است و $y = 2x^3 + 1$ هم یک به یک است، پس $y = g(x)$ تابعی یک به یک است.

$$f^{-1}(5) = 3 \Rightarrow f(3) = 5, \quad g^{-1}(a+1) = 1 \Rightarrow g(1) = a+1$$

$$x = 1 : g(1) = f(3) + 1 \xrightarrow{f(3)=5} g(1) = 6 \Rightarrow g^{-1}(6) = 1 \Rightarrow a+1 = 6 \Rightarrow a = 5$$

$$\text{راه حل دوم:} \quad g^{-1}(a+1) = 1 \Rightarrow g(1) = a+1 \Rightarrow f(2x^3 + 1) \Big|_{x=1} = a$$

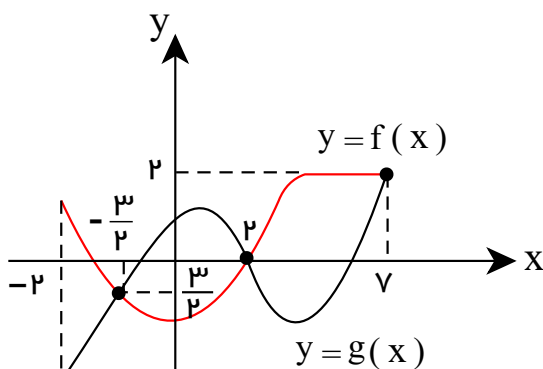
$$\Rightarrow f^{-1}(a) = 2x^3 + 1 \Big|_{x=1} \Rightarrow f^{-1}(a) = 3 \Rightarrow a = 5$$

-سخت

$$12. \text{گزینه ۴} \quad \text{برای یافتن دامنه ی } \frac{1}{\sqrt{f(x) - g(x)}}, \text{ باید } x \text{ هایی را بیابیم که برای آن ها حاصل } f(x) - g(x) \text{ مثبت است،}$$

یعنی باید داشته باشیم $f(x) - g(x) > 0$ یا $f(x) > g(x)$.

توجه کنید که $f(x) - g(x)$ نمی تواند برابر صفر باشد چون باعث صفر شدن مخرج کسر میشود. اگر نمودار هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم خواهیم داشت:



-متوسط

باتوجه به شکل به ازای مقادیری از x که به $(2, 7) \cup [-2, -\frac{3}{2}]$ تعلق دارد $f(x)$ بزرگ تر

از $g(x)$ است.

۱۳. گزینه ۱ به تابع های زیر توجه کنید:



$$\begin{aligned} f &= \{(1, 2), (2, 0)\} \\ g &= \{(1, 3), (3, -1)\} \end{aligned} \Rightarrow f \cup g = \{(1, 2), (2, 0), (1, 3), (3, -1)\}$$

رابطه فوق تابع نیست زیرا دو زوج مرتب متمایز با مولفه‌های اول یکسان در رابطه وجود دارد.
اگر بقیه گزینه‌ها را تشکیل دهیم شرایط تابع بودن را دارند.

-سخت

۱۴. گزینه ۱

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \quad \text{و} \quad \cos u = 2\cos^2 u - 1 \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$A = \frac{3 + (2\cos^2 2x - 1)}{2\sin^2 2x} = \frac{2 + 2\cos^2 2x}{2\sin^2 2x} = \frac{1 + \cos^2 2x}{\sin^2 2x}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 2x} + \frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x} = (1 + \cot^2 2x) + \cot^2 2x = 1 + 2\cot^2 2x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2\sqrt{2}}{1 - (\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{1 - 2} = -2\sqrt{2}$$

$$A = 1 + 2\cot^2 2x = 1 + \frac{2}{\tan^2 2x} = 1 + \frac{2}{(-2\sqrt{2})^2} = 1 + \frac{2}{8} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

-سخت

۱۵. گزینه ۳ عبارت زیر رادیکال فرجه‌ی زوج، باید مثبت باشد $\frac{x - |x|}{\sin^2(\pi x)} \geq 0 \leftarrow$ مخرج چون توان زوج دارد همواره مثبت

است و فقط نباید برابر صفر گردد:

$$\sin^2(\pi x) \neq 0 \rightarrow \sin(\pi x) \neq 0 \rightarrow \pi x \neq k\pi \rightarrow x \neq k \quad (I) \quad \text{یعنی اعداد صحیح در دامنه نیستند}$$

$$x - |x| \geq 0 \rightarrow x \geq |x| \rightarrow x = |x| \rightarrow x \geq 0 \quad (II)$$

$$I \cap II = [0, +\infty) - \mathbb{Z} = [0, +\infty) - \mathbb{W}$$

-متوسط

۱۶. گزینه ۳

$$2[x] + 3 = 0 \rightarrow [x] = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

$$\Rightarrow Df = \mathbb{R} \Rightarrow \text{مخرج صفر نمی‌شود}$$

-آسان

۱۷. گزینه ۱

$$D = 60^\circ \rightarrow \frac{60}{180} = \frac{\theta}{\pi} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \rightarrow L = \theta \cdot r = \frac{\pi}{3} \times 500 = \frac{500\pi}{3} Km$$

-متوسط



۱۸. گزینه ۳

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \rightarrow \cos x = \pm \frac{4}{5} \xrightarrow{x \text{ ناحیه } 2} \cos x = -\frac{4}{5}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{-4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\tan\left(\frac{17\pi}{2} + x\right) = \tan\left(8\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x = -\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

-متوسط

۱۹. گزینه ۲ زمانی که $x \rightarrow 3^+$ مقادیر تابع از پایین به ۲ نزدیک می‌شود پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f \circ f(x) = f(f(3^+)) = f(2^-) = -2$$

-متوسط

۲۰. گزینه ۱

$$\begin{aligned} \frac{2 \cos 15^\circ + \cos(90^\circ + 15^\circ)}{\sin(180^\circ + 15^\circ) + \cos(180^\circ - 15^\circ)} &= \frac{2 \cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{-\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{\frac{2 \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ} - \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{-\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} - \frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}} \\ &= \frac{2 - \tan 15^\circ}{-\tan 15^\circ - 1} = \frac{2 - a}{-a - 1} \end{aligned}$$

-متوسط

۲۱. گزینه ۱ چون تابع f در نقطه‌ی $x = -2$ حد دارد، پس $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = L$.

$$\Rightarrow L + (-6 - 1) = 9 \Rightarrow L - 7 = 9 \Rightarrow L = 16 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 16$$

-آسان

۲۲. گزینه ۴

$$x - \pi = t \Rightarrow x = \pi + t, t \rightarrow 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(3\pi + 3t)}{\sin(2\pi + 2t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin 3t}{\sin 2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin 3t}{3t} \times 3t}{\frac{\sin 2t}{2t} \times 2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-3t}{2t} = -\frac{3}{2}$$

-متوسط

۲۳. گزینه ۱

$$f(-4) = g(-4) \Rightarrow p + 3 = 7 \rightarrow \boxed{p = 4}$$

$$y = 6 \rightarrow 3n = 9 \rightarrow \boxed{n = 3}, \quad f(5) = g(5) \rightarrow m^2 - 1 = 8 \rightarrow m^2 = 9$$

$$\rightarrow \boxed{m = \pm 3} \quad m = 3 \rightarrow m - n + p = 3 - 3 + 4 = 4$$

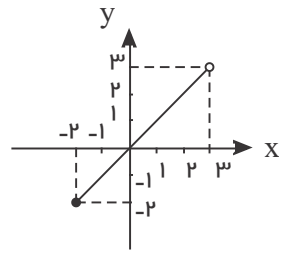
$$m = -3 \rightarrow m - n + p = -3 - 3 + 4 = -2$$

-متوسط



۲۴. گزینه ۲

$$y = f \circ f^{-1}(x) = x, \quad x \in D_{f^{-1}} \Rightarrow x \in R_f \Rightarrow y = x, \quad -2 \leq x < 3$$



-آسان

۲۵. گزینه ۲

$$f(x) - 3f(-x) = x^3 + 2 \xrightarrow{x \rightarrow -x} f(-x) - 3f(x) = -x^3 + 2$$

$$3 \times \begin{cases} f(-x) - 3f(x) = -x^3 + 2 \\ -3f(-x) + f(x) = x^3 + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3f(-x) - 9f(x) = -3x^3 + 6 \\ -3f(-x) + f(x) = x^3 + 2 \end{cases}$$

$$-8f(x) = -2x^3 + 8 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 1$$

-متوسط

۲۶. گزینه ۲

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-2x} \Rightarrow f^{-1}(1) = \frac{2}{-1} = -2 \Rightarrow (1, -2) \in f^{-1}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم $f(-2) = 1$ است. چون $f(g^{-1}(a)) = 1$ است در نتیجه، $g^{-1}(a) = -2$ بوده و از آن جا $a = g(-2)$ می‌شود و با توجه به نمودار $a = -1$ است.

-سخت

۲۷. گزینه ۴ یک تابع چند ضابطه‌ای در صورتی یک به یک است که اولاً هر دو ضابطه آن یک به یک باشند ثانیاً اشتراک بردهای هر دو ضابطه تهی باشد.

هر دو ضابطه تابع f یک به یک است، در نتیجه f وقتی یک به یک می‌باشد که اشتراک بردهای دو ضابطه تهی باشد.

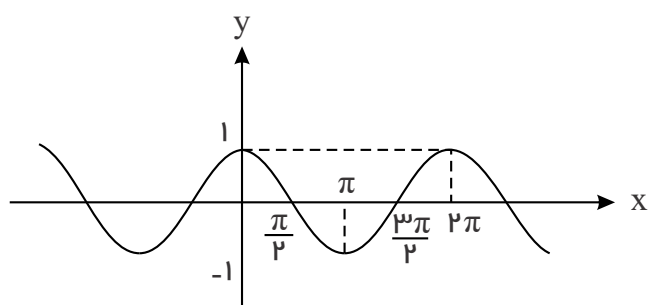
$$x \leq -1 \Rightarrow 3x \leq -3 \Rightarrow 3x - 4 \leq -7 \Rightarrow y_1 \leq -7$$

$$x > -1 \Rightarrow -x < 1 \Rightarrow -x + m < m + 1 \Rightarrow y_2 < m + 1$$

m هر عددی و در هر محدوده‌ای که باشد، دو بُرد بالا اشتراک پیدا می‌کنند. پس به‌ازای هیچ مقداری از m تابع یک به یک نمی‌شود.

-متوسط

۲۸. گزینه ۲



نکته ۱: نمودار $y = \cos x$ به‌صورت مقابل است:

نکته ۲: برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + k$ کافی است نمودار تابع

$y = f(x)$ را به اندازه k واحد روی محور y ها انتقال دهیم. اگر $k > 0$ ، حرکت به سمت بالا و اگر $k < 0$ ، حرکت به سمت پایین است.

نکته ۳: برای رسم نمودار $y = f(x + k)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را به اندازه k واحد روی محور x ها انتقال دهیم. اگر $k > 0$ ، انتقال به سمت چپ و اگر $k < 0$ ، انتقال به سمت راست محور x ها می‌باشد.

از مقایسه نمودار $y = \cos x$ و نمودار داده‌شده، می‌توان فهمید که نمودار به‌اندازه $\frac{1}{2}$ واحد به سمت پایین حرکت کرده است زیرا

کمترین مقدار در نمودار $y = \cos x$ برابر -1 و در نمودار داده‌شده $-\frac{3}{2}$ است. پس $a = -\frac{1}{2}$ ، از طرفی مطابق ضابطه داده‌شده

و نکته ۳، نمودار به‌اندازه $\frac{\pi}{6}$ روی محور x ها به سمت راست حرکت کرده است، پس: $b = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$



$$a \times b = -\frac{1}{2} \times \frac{7\pi}{6} = -\frac{7\pi}{12}$$

بنابراین:

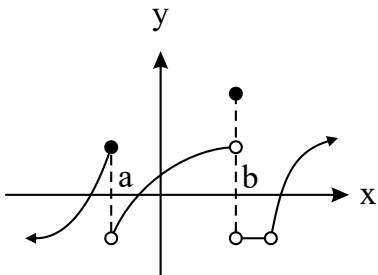
-سخت

۲۹.گزینه ۲

$$A = \frac{\sin(20^\circ + 50^\circ)}{-\cos(40^\circ + 10^\circ)} = \frac{\sin 70^\circ}{-\cos 50^\circ} = \frac{\cos 20^\circ}{-\sin 40^\circ} = \frac{\cos 20^\circ}{-2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{-1}{2 \sin 20^\circ}$$

-متوسط

۳۰.گزینه ۲ با توجه به شکل زیر، در نقاط $x = a$ و $x = b$ حد چپ و راست تابع با هم برابر نیستند، پس تابع حد ندارد.



-آسان

۳۱.گزینه ۲

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - 3x + 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - (3x - 1)}{x^2 - 1} \times \frac{2\sqrt{x} + (3x - 1)}{2\sqrt{x} + (3x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - (3x - 1)^2}{(x^2 - 1)(2\sqrt{x} + 3x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 9x^2 + 6x - 1}{(x^2 - 1)(2\sqrt{x} + 3x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(9x^2 - 10x + 1)}{(x^2 - 1)(2\sqrt{x} + 3x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x - 1)(9x - 1)}{(x - 1)(x + 1)(2\sqrt{x} + 3x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(9x - 1)}{(x + 1)(2\sqrt{x} + 3x - 1)} = \frac{-8}{2 \times 4} = -1 \end{aligned}$$

-متوسط

۳۲.گزینه ۳

$$Df : x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \quad (I)$$

$$gof = \sqrt{\log \sqrt{x - 2}} \Rightarrow Dgof : \log \sqrt{x - 2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x - 2} \geq 1 \Rightarrow x \geq 3 \quad (II)$$

$$(I) \cap (II) \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow Dgof = [3, +\infty)$$

-سخت

۳۳.گزینه ۳

$$f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 + x - 2} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)}{(x + 2)(x - 1)}$$

در نگاه اول ریشه‌های معادله عبارت‌اند از: ۱ و -۱ و -۲ و ۲+

با کمی دقت متوجه می‌شویم $x = 1$ و $x = -2$ ریشه‌های مخرب هستند و جزء دامنه تابع نیستند. بنابراین ریشه‌های تابع عبارتند از: $x = 1$ و $x = 2$.

بنابراین حاصل جمع ریشه‌ها برابر ۱ می‌باشد.

-سخت

۳۴.گزینه ۲ با توجه به اینکه رأس نمودار نقطه $(-3, -2)$ می‌باشد، بنابراین $n = -3$ و $q = -2$. همچنین با توجه به اینکه نمودار از نقطه $(3, 0)$ عبور می‌کند خواهیم داشت:



$$3 = m|0 - (-3)| - 2 \Rightarrow 3m = 5 \Rightarrow m = \frac{5}{3}$$

-متوسط

۳۵. گزینه ۴ برای تشکیل $f(2x - 1)$ باید در تابع $f(x)$ ، x را برداشته و به جای آن عبارت $2x - 1$ را قرار دهیم. بنابراین در دامنه تابع f یعنی $-6 \leq x < 3$ باید x را برداشته و عبارت $2x - 1$ را قرار دهیم و نامعادله حاصل را حل کنیم. توجه کنید که انتقال عمودی در دامنه تأثیری ندارد.

$$y = f(x) \rightarrow -6 \leq x < 3$$

$$g(x) = f(2x - 1) + 2 \Rightarrow -6 \leq 2x - 1 < 3 \rightarrow -5 \leq 2x - 1 + 1 < 4$$

$$\Rightarrow -5 \leq 2x < 4 \rightarrow -\frac{5}{2} \leq x < 2 \Rightarrow Dg = [-\frac{5}{2}, 2)$$

-متوسط

۳۶. گزینه ۴ - تابع در بازه $(-\infty, 2)$ صعودی است ولی اکیداً صعودی نمی باشد.
 - تابع در بازه $[1, 3]$ غیریکنوا است زیرا در $1 \leq m < 2$ اکیداً صعودی و در $2 \leq m \leq 3$ اکیداً نزولی است.
 - تابع در بازه $[-1, 2]$ غیر یکنوا است زیرا در $-1 \leq m < 2$ اکیداً صعودی است ولی به عنوان مثال برای $x = 1.9$ و $x = 2$ از بازه $[-1, 2]$ داریم:

$$1.9 < 2 \Rightarrow f(1.9) > f(2)$$

- تابع در بازه $(-1, 2)$ اکیداً صعودی است.

-آسان

۳۷. گزینه ۲

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

با اعمال $x^2 = -1$ در مقسوم، باقی مانده به دست می آید که برابر صفر است.

$$f(x) = m(x^2)^2 + nx^2 + 5 \xrightarrow{x^2=-1} m(-1)^2 + n(-1) + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{m - n = -5} \quad (1)$$

$$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$$

با اعمال $x^3 = -1$ در g ، باقی مانده به دست می آید.

$$g(x) = m(x^3)^3 + n(x^3)^2 - 4 \xrightarrow{x^3=-1} m(-1)^3 + n(-1)^2 - 4 = \text{باقی مانده}$$

$$= -m + n - 4 = -(m - n) - 4 = -(-5) - 4 = 1$$

-سخت



۳۸. گزینه ۴

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$4(\sin^4 x + \cos^4 x) = 3 \Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 1 - 2\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = 2 \times \frac{1}{4} \sin^2 2x \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}, \pi + \frac{\pi}{8} \Rightarrow \text{جواب ۲}$$

$$2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{8}, \pi + \frac{3\pi}{8} \Rightarrow \text{جواب ۲}$$

$$\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{8} \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{8}, 2\pi - \frac{\pi}{8}$$

→ جواب ۲

$$2x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{8} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{8}, \pi + \frac{5\pi}{8} \rightarrow \text{جواب ۲}$$

در کل معادله ۸ جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد.

-سخت

۳۹. گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{x+2}{f(x)} \right] = \left[\frac{1+2}{+\infty} \right] = \left[\frac{3}{+\infty} \right] = [0^+] = 0$$

-آسان

۴۰. گزینه ۱

با توجه به نمودار تابع f داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{x} + f(x) \right) = 2 + (-\infty) = -\infty$$

-متوسط

۴۱. گزینه ۴ حد هر چند جمله‌ای در $x \rightarrow \pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (mx^2 - (x+1)^2 + 2) = -\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (mx^2 - x^2 - 2x - 1 + 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} ((m-1)x^2 - 2x + 1)$$

$$1 \text{ حالت } m-1 = 0 \rightarrow m=1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = -2(-\infty) = +\infty$$

این حالت غیر ممکن است.

$$2 \text{ حالت } m-1 \neq 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (m-1)x^2 = (m-1)(-\infty)^2 = (m-1)(+\infty) = -\infty$$

$$\rightarrow m-1 < 0 \rightarrow m < 1$$

-متوسط

۴۲. گزینه ۳ روشن است که گزینه‌های ۲ و ۴ نقشی در انبساط و انقباض تابع ندارند و صرفاً تابع را انتقال می‌دهند.



می‌دانیم برای انبساط افقی اگر تابع در عدد بین صفر و یک ضرب شود، دچار انبساط افقی می‌شود. بنابراین گزینه ۳ خواسته مسئله را برآورده می‌کند. توجه کنید قرینه نسبت به محور x در گزینه‌های ۱ و ۳ نقشی در انبساط و انقباض تابع ندارند.

-متوسط

۴۳.گزینه ۴

الف) $y = \sin ax \xrightarrow{x=\frac{\pi}{a}} y = \sin \pi = 0 \rightarrow$ حداکثر مقدار y نیست.

ب) $y = \cos ax \xrightarrow{x=\frac{\pi}{a}} y = \cos \pi = -1 \rightarrow$ حداکثر مقدار y است.

ج) $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sin^2 ax \rightarrow T_1 = \frac{\pi}{a} \\ \cos ax \rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{a} \end{array} \right\} \rightarrow T_1 = \frac{T_2}{2} \rightarrow$ پس جمله صحیح است.

د) $\left\{ \begin{array}{l} y = |\sin x| \rightarrow T_1 = \pi \\ y = \cos 2x \rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi \end{array} \right\} \Rightarrow T_1 = T_2 \rightarrow$ پس جمله صحیح است.

-متوسط

۴۴.گزینه ۳

غیر ممکن $\rightarrow |x| + 1 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x| + 1 = 0 \\ |x| = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow Df = \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \right.$

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{|x|} \Rightarrow |x| = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow Dg = \mathbb{R} - \{0\}$

با توجه به اینکه $|x|$ عبارتی نامنفی است و $x \neq 0$ ، پس هر دو تابع مقادیر مثبتی دارند و دامنه‌های f و g نمی‌توانند زیرمجموعه برد آنها باشند. بنابراین فقط گزینه ۳ صحیح است.

$Df = Dg = \mathbb{R} - \{0\}$

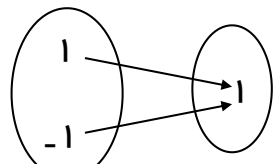
-متوسط

۴۵.گزینه ۳ الف) تابع نیست، زیرا ممکن است یک فرد به چندین نوشیدنی متفاوت علاقه داشته باشد.

ب) تابع نیست، زیرا مثلاً عدد ۲۵ دارای دو ریشه دوم ۵ و -۵ است.

پ) ابتدا نامعادله $x^2 - 4 < 0$ را حل می‌کنیم:

$$x^2 - 4 < 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2$$

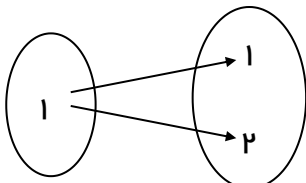
تابع است \Rightarrow  \Rightarrow مقسوم‌علیه‌های طبیعی $\pm 1 \Rightarrow$ اعداد صحیح

ت) ابتدا نامعادله $|x - 1| < 1$ را حل می‌کنیم:

$$|x - 1| < 1 \Rightarrow -1 < x - 1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2 \Rightarrow \{1\} = \text{دامنه}$$

حال نامعادله $2x^2 - 18 < 0$ را حل می‌کنیم:

$$2x^2 - 18 < 0 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow |x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3 \xrightarrow{\text{اعداد طبیعی}} \text{برد} = \{1, 2\}$$

 تابع نیست.

-متوسط

۴۶.گزینه ۳ بیش‌ترین مقدار سینوس و کسینوس برابر ۱ است. وقتی جمع یک سینوس و کسینوس برابر ۲ شده باشد، یعنی هر دو مقدار برابر ۱ است. یعنی داریم:



$$\begin{cases} \sin(\frac{\hat{B}}{2} + \hat{C}) = 1 \rightarrow \frac{\hat{B}}{2} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} \\ \cos(\hat{A} - \hat{B}) = 1 \rightarrow \hat{A} - \hat{B} = 0 \rightarrow \hat{A} = \hat{B} \end{cases}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow \hat{B} + \hat{B} + 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} = 180^\circ$$

$$\rightarrow 3\frac{\hat{B}}{2} = 90^\circ \rightarrow \hat{B} = 60^\circ \rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$$

یعنی مثلث متساوی الاضلاع است.

-سخت

۴۷. گزینه ۲ برای $x > -2$ نقطه رأس سهمی $x = -1$ است، پس داریم:

$$x > -2 \Rightarrow f(x) = -(x - a)^2 + 3 \Rightarrow \text{رأس } x = a \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

برای $x < -2$ تابع ثابت $f(x) = 2$ تعریف شده است، پس داریم:

$$x < -2 \Rightarrow f(x) = a + c \Rightarrow a + c = 2 \Rightarrow -1 + c = 2 \Rightarrow \boxed{c = 3}$$

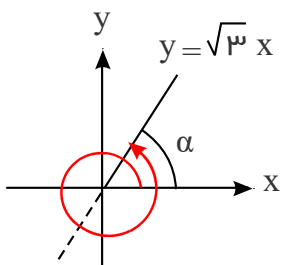
$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = 0 \Rightarrow b(-2)^2 - c(-2) + 2b = 0 \Rightarrow 4b + 2c + 2b = 0 \Rightarrow 6b = -2c$$

$$\Rightarrow 6b = -2 \times 3 = -6 \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

-آسان

۴۸. گزینه ۴ با توجه به معادله خط داده شده ($y = \sqrt{3}x$) شیب خط برابر $\sqrt{3}$ است که برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با

سمت راست محور طول‌ها می‌سازد بنابراین داریم:

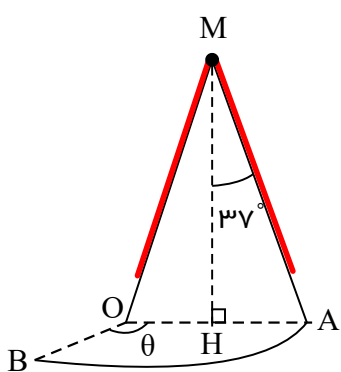


$$\text{شیب خط} = \tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

در نهایت زاویه خواسته شده برابر $\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$ می‌باشد.

-متوسط

۴۹. گزینه ۳



$$\left. \begin{aligned} \ell = \widehat{AB} &= 48 \text{ cm} \\ \theta &= 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \\ \pi &\simeq 3 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow |OA| = r = \frac{\ell}{\theta} = \frac{48}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{48 \times 3}{2\pi} = 24 \text{ cm}$$

چون مثلث $\triangle OMA$ متساوی الساقین است ارتفاع MH میانه وارد بر OA نیز هست بنابراین:

$$AH = \frac{OA}{2} = 12$$

از طرفی:

$$\sin 37^\circ = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AH}{AM} = \frac{12}{AM} = \frac{3}{5} \Rightarrow AM = 20 \text{ cm}$$

-سخت



$$f(x) = -(\sin^2 x - \sin x) + 1 = -\left(\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = -\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq \sin x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{4} \leq -\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow -\frac{9}{4} + \frac{5}{4} \leq -\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow -1 \leq f(x) \leq \frac{5}{4} \Rightarrow \min f = -1$$

متوسط



پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۹۱۲۷۲۰

| | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| ۲ -۵ | ۳ -۴ | ۱ -۳ | ۲ -۲ | ۴ -۱ |
| ۴ -۱۰ | ۳ -۹ | ۲ -۸ | ۴ -۷ | ۲ -۶ |
| ۳ -۱۵ | ۱ -۱۴ | ۱ -۱۳ | ۴ -۱۲ | ۳ -۱۱ |
| ۱ -۲۰ | ۲ -۱۹ | ۳ -۱۸ | ۱ -۱۷ | ۳ -۱۶ |
| ۲ -۲۵ | ۲ -۲۴ | ۱ -۲۳ | ۴ -۲۲ | ۱ -۲۱ |
| ۲ -۳۰ | ۲ -۲۹ | ۲ -۲۸ | ۴ -۲۷ | ۲ -۲۶ |
| ۴ -۳۵ | ۲ -۳۴ | ۳ -۳۳ | ۳ -۳۲ | ۲ -۳۱ |
| ۱ -۴۰ | ۱ -۳۹ | ۴ -۳۸ | ۲ -۳۷ | ۴ -۳۶ |
| ۳ -۴۵ | ۳ -۴۴ | ۴ -۴۳ | ۳ -۴۲ | ۴ -۴۱ |
| ۳ -۵۰ | ۳ -۴۹ | ۴ -۴۸ | ۲ -۴۷ | ۳ -۴۶ |

